17. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kunck6am/

Příklady

1. Spočtěte limity

   (a)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

   Řešení:
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

   vnitřní funkce:
   $$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1,$$

   neboť další vnitřní funkce
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

   a
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

   (podmínka P2, $g(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ pro $\forall x \in (0,\infty)$.)
   Zpět k funkci
   $$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1,$$

   tady podmínka P1, e^z je spojitá funkce v bodě 1.

   (b)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = e^{-2},$$

   analogicky.

   (c)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x$$

   Řešení:
   $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$$

   vnitřní funkce:
   $$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} \overset{VOAL}{=} 0\cdot 1 = 0$$

Použita vnitřní funkce na logaritmus, podmínka P2, $2/x^2 \neq 0$ na $(0, \infty)$.
Celkem tedy

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x = e^0 = 1,$$

(podmínka P1, e^z spojitá v 0.)

2. (a)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})(1-x)}$$

Řešení: $\frac{1}{2}$, limita se určí dosazením.

(b)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme jednoduché úpravy na exponent a dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/[(1-x)(1+\sqrt{x})]} =$$

a nyní zkrácením a dosazením dostaneme

$$= \frac{2}{3}^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(c)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme klasický trik převedení do exponentu za použití vzorce $y = e^{\ln y}$.

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to +\infty} \exp\left[\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right] =$$

Symbolem $\exp[y]$ míníme totéž co e^y. Podle věty o limitě složené funkce (varianta (S)) lze přehodit pořadí exp a lim — to je velmi užitečná vlastnost (spojité) exponenciální funkce.

$$= \exp\left[\lim_{x\to +\infty} \ln\frac{1+x}{2+x} \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right]$$

Limitu v závorce je jednoduché spočítat vytknutím x v čitateli a jmenovateli obou zlomků a vyjde, že

$$= \exp\left[\ln 1 \cdot 0\right] = \exp[0] = e^0 = 1.$$

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right] =$$

Podle věty o limitě složené funkce lze přehodit pořadí lim a exp.

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right] =$$

Nyní zlomek konverguje k jedné polovině a logaritmus jedné poloviny je záporné číslo. Proto se od jistého velkého x se bude logaritmus lišit od $\ln\frac{1}{2}$ jen o velmi málo, zatímco x^2 poroste nade všechny meze.

$$= \exp\left[\ln\frac{1}{2}\cdot+\infty\right] = e^{-\infty} = 0.$$

(e)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right] = \exp\left[\ln\frac{3}{2}\cdot-\infty\right] = e^{-\infty} = 0.$$

(f)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\ \left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}\ 2x}$$

Řešení:
Uvědomme si, že zkoumáme jednostrannou limitu. Proto jde exponent do $-\infty$ (to plyne z vlastností funkce tangens). Pokud si zároveň uvědomíme, že $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi \geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ a že logaritmus čísla většího než jedna je kladný, je skoro vše hotovo.

$$\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg}\ \left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}\ 2x} = \exp\left\{\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}}\ln\left[\operatorname{tg}\ \left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\operatorname{tg}\ 2x\right\} = \exp\left\{\ln\left(\operatorname{tg}\ \frac{3}{8}\pi\right)\cdot-\infty\right\} = e^{-\infty}$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Řešení:
Stále stejně.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right] = \exp\left[\ln 1\cdot 1\right] = e^0 = 1.$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$$

Řešení:
Klasický trik s exponencielou dává

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x} = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)\cdot\frac{1}{x}\right] = \exp\left[\ln\frac{1}{2}\cdot 0\right] = e^0 = 1.$$

(i)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Řešení:
V té vhodně rozšíříme.

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}} =$$

Nyní použijeme triku exponenciály.

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\right] =$$

Protože logaritmus je spojitá funkce, je

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] =$$

První limitu nyní spočteme substitucí $y=\frac{1}{x^2}$, druhou známe.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \exp\left[\ln e\cdot 1^2\right] = \exp[1] = e^1 = e.$$

(j)
$$\lim_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}\,^2 x}$$

Řešení: Samotný exponenciální trik příliš nepomůže. Počítejme zhruba podle našeho odvozeného schématu (některé kroky si ušetříme).

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}\,^2 x} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{-1} \cdot \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

První limitu spočteme snadno dosazením, vyjde $(1+0)^{-1} = 1^{-1} = 1$. Zbyde tedy pouze druhá limita. V té vhodně rozšíříme.

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}} =$$

Nyní použijeme triku exponenciály.

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\right] =$$

Protože logaritmus je spojitá funkce, je

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] =$$

První limitu nyní spočteme substitucí $y = \frac{1}{x^2}$, druhou známe.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right) \cdot \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \exp\left[\ln e \cdot 1^2\right] = \exp[1] = e^1 = e.$$

(k)
$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}\,x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

Řešení:

řešíme pomocí chytrého rozšíření exponentu a exponenciálního triku: využíváme též větu o limitě součinu a spojitost logaritmu (tj. možnost přehození limity a logaritmu).

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg}\,x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\,x}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}\,x}{\sin x}} = \exp\left[\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}\,x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\,x}} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\,x}{\sin x}\right] =$$

Nyní první limita je po substituci $y = \operatorname{tg}\,x$ rovna e a druhá je zřejmě rovna jedné, jak plyne z faktu $\frac{\operatorname{tg}\,x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$$= \exp\left[\ln e\right] = e^1 = e.$$

Pokud dáme oba výsledky dohromady a využijeme větu o limitě podílu, plyne odtud

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\,x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{e}{e} = 1.$$

(l)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\mathrm{tg}\ x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$$

Řešení:

Je zřejmé pomocí substituce $y=\sin x$, že

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e.$$

(Úplně lze důkaz provést počítáním jednostranných limit a substitucí $z=\frac{1}{y}$.) Problematická je tedy pouze limita

$$\lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\ x)^{\frac{1}{\sin x}}=$$

Tu řešíme pomocí chytrého rozšíření exponentu a exponenciálního triku: využíváme též větu o limitě součinu a spojitost logaritmu (tj. možnost přehození limity a logaritmu).

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\mathrm{tg}\ x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\ x}}\right]^{\frac{\mathrm{tg}\ x}{\sin x}}=\exp\left[\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}\ x\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\ x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\ x}{\sin x}\right]=$$

Nyní první limita je po substituci $y=\mathrm{tg}\ x$ rovna e a druhá je zřejmě rovna jedné, jak plyne z faktu $\frac{\mathrm{tg}\ x}{\sin x}=\frac{1}{\cos x}$.

$$=\exp\left[\ln e\right]=e^1=e.$$

Pokud dáme oba výsledky dohromady a využijeme větu o limitě podílu, plyne odtud

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\mathrm{tg}\ x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\frac{e}{e}=1.$$

(m)

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$$

Řešení:

Obdobnou metodou jako v minulém příkladě.

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin a+\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{1}{x-a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}}=$$

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}\right)\right]=$$

Substituce $y=\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}$ na první limitu. Pro druhou využijte příklad VI.13. (Jde vlastně o derivaci funkce sinus.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)\cdot\frac{1}{\sin a}\right]=$$

$$= \exp\left[\ln(e)\cdot\cos a\cdot\frac{1}{\sin a}\right]=e^{\frac{\cos a}{\sin a}}=e^{\mathrm{cotg}\ a}.$$

(n)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}\ x}$$

Řešení:

Obdobnou metodou jako v příkladu XXII.C.4. Rozšíření je v tomto případě velmi nenápadné.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}\ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+(\sin x-1))^{\mathrm{tg}\ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}\right]^{(\sin x-1)\mathrm{tg}\ x}=$$

Přechod pomocí exponenciálního triku k následující rovnosti by pro vás měla být již rutinní záležitost.

$$= \exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\mathrm{tg}\ x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}\right]=$$

Nyní je možné použít pro lepší vhled třeba substituci $y=x-\pi/2$, přičemž se snadno ukáže ze součtových vzorců, že $\sin(y+\pi/2)=\cos y$ a $\cos(y+\pi/2)=-\sin y$.

$$= \exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{-\sin y}\right]=\exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1-\cos y}{y^2}}{\frac{\sin y}{y}}\cdot y\right]=\exp\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 0\right]=e^0=1.$$

3. (a)