16. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení:

Funkce je v bodě 0 spojitá, platí tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{0-1}{0-0-1} = 1.$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení:

Počítáme-li limitu v nevlastním bodě, stačí vytknout „nejvíce rostoucí“ (dominantní) člen, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to \infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{2-0-0} = \frac{1}{2}.$$

3.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení:

Platí, že $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$ a (buď výpočtem kořenů nebo uhodnutím s pomocí faktu, že 1 je kořen, lze odvodit, že) $2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$. Platí tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

4.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

Řešení:

Snadno se ověří, že jednička je kořen. Použijeme dělení členem $(x-1)$ nahoře i dole. Když vydělíte poprvé, vyjde, že jednička je opět kořenem v čitateli i jmenovateli a je potřeba dělit znovu. Dostane se tak

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}.$$

5.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$$

Řešení:

Rozložte polynomy na součin a pak teprve umocněte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{[(x-2)^2]^{10}(x+4)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}}.$$

6.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1},$$

kde m, n jsou přirozená čísla.

Řešení:

Sledujte výpočet. Uvědomte si, že proměnnou je x, nikoliv m, n, která jsou danými parametry. Opět by šlo použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1} = \frac{m}{n}.$$

Jiné řešení skýtá fakt, že

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} mx^{m-1} = m,$$

což víme ze vzorců pro derivaci funkce x^m, vlastně počítáme derivaci této funkce v bodě 1. Známe-li tento vzorec, lze tento postup použít i pro m, n reálná, různá od nuly.

7.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

8.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x-1}}$$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

9.
$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1+2x-9}{x-4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{x-4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to4}2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\cdot\frac{2+2}{3+3}=\frac{4}{3}.$$

10.
$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

kde $a>0$

Řešení:

Úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\left[\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1\right]=\frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}},$$

neboť

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{0}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}=0.$$

11.
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$$

Řešení:

Úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4}{\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-6+8}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-2x+4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{144}.$$

12.
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x\right)$$

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

vytknutím $\sqrt{x}$ v čitateli i jmenovateli a krácením dostaneme

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

13.
$$\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$$

Řešení:

V příkladu je dobré provést substituci $\frac{1}{x} = y$. Přitom je důležité, že původní limita je jednostranná, totiž že $x \to 0+$, a proto $y = \frac{1}{x} \to +\infty$. Platí tedy:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y+\sqrt{y+\sqrt{y}}}-\sqrt{y-\sqrt{y+\sqrt{y}}}\right)=$$

Klasicky rozšiřujeme.

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-(\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}})}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=$$

Vytknutím $\sqrt{1/x}$ v čitateli i jmenovateli a zkrácením dostaneme

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=\frac{2}{2}=1.$$

14.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$$

Řešení:

Počítejme. Pokud vám vadí zápis odmocnin pomocí racionálních exponentů, přepište si jej.

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}]=\lim_{x\to\infty} x^{1/3}\cdot\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x\cdot x^{1/3}}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(1+\frac{1}{x})^{4/3}+(1+\frac{1}{x})^{2/3}(1-\frac{1}{x})^{2/3}+(1-\frac{1}{x})^{4/3}}=\frac{4}{1+1+1}=\frac{4}{3}.$$