9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Fakta

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Příklady

1. Spočtěte limity

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$$

   (b)
   $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

   (c)
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$$

   (d)
   $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

   (e)
   $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

2. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

   (b)
   $$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$
   Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

   (c) Nechť $0 \le a \le 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy
   $$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

3. Spočtěte limity s celou částí

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{n^3+1}] + [\sqrt{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots n^n}}$$

   (b)
   $$\lim_{n\to\infty}[\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n]$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]}$$

4. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

(g)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$

(h) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b) = 0$$

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)}$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

(l)

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \sin n\pi)$$

Teorie

5. (a) Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ neexistuje?

   (b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?

   (c) Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?