7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq\ b_n,$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}.$

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Věta 2 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Věta 3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s **kladnými** členy, splňující podmínku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Nebude-li tvrzení dokázáno na přednášce, musíte jej být schopni dokázat sami.

Věta 4. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Důkaz nepřímo vyplyne v kapitole o řadách.

Věta 5. Pokud q je racionální číslo a $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (a je vlastní), potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n^q = (\lim_{n\to\infty} a_n)^q.$$

Pokud q je kladné racionální číslo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_n \geq 0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n^q = 0.$$

Fakta

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

2. pro $a > 1$ je
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

3. Pro $\beta > 0$ a $a > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

4. Pro $\alpha > 0$ (tj. libovolně velké) a pro $\beta > 0$ (tj. libovolně malé)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = 0.$$

Nechť $a > 0$.

1. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$
4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Hinty

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$$
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

Příklady

1. Spočtěte limitu

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n+2} - \frac{n}{2} \right\}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} \right\}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

2. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

(e) $a, b, c > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$$

pro $a > b > 0$

(g)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$$

Teorie

(a) Nechť posloupnost x_n je konvergentní a posloupnost y_n je divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

(b) Nechť posloupnosti x_n a y_n jsou divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

(c) Nechť $\lim x_n = 0$ a y_n je libovolná posloupnost. Je možné říci, že $\lim(x_n y_n) = 0$?

(d) Nechť $\lim(x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim x_n = 0$ nebo $\lim y_n = 0$?

Bonus

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{(n+2)^2}}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$$

(e)
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n+n} - n$$

(g)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

(h)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}$$

(i)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$