2. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu
$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n];\ \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \colon a_i \in A_i\},$$
tedy množinu uspořádaných n-tic $[a_1, \dots, a_n]$.
- *Binární relací* R mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi* A *a* B nebo o *relaci z* A *do* B. Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace R značíme $[a, b] \in R$ nebo aRb.

Definice 2. Nechť R je relace na množině X. Řekneme, že R je

- *symetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$$
- *antisymetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in X;\ x\,R\,y\ \&\ y\,R\,x \Rightarrow x = y$$
- *tranzitivní*, jestliže
$$\forall x, y, z \in X;\ x\,R\,y\ \&\ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$$
- *reflexivní*, jestliže
$$\forall x \in X;\ x\,R\,x$$

Definice 3. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny A do množiny B (a zpravidla značíme $F : A \to B$), jestliže platí
$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B \colon\ (([x, y_1] \in F\ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$
Jsou-li A, B množiny a $F \subset A \times B$ je zobrazení, pak tento fakt značíme symbolem $F : A \to B$.

Definice 4. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu
$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M \colon\ f(x) = y\}$$
nazýváme *obrazem množiny* M při zobrazení f.

- Nechť P je libovolná množina. Pak množinu

$$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$

nazýváme *vzorem množiny* P při zobrazení f.

Definice 5. Nechť A a B jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že f je *prosté* (*injektivní*), jestliže

$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y).$$

(2) Řekneme, že f je *„na“* (*surjektivní*), jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že f je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a „na“.

Definice 6.
- Říkáme, že množiny A, B *mají stejnou mohutnost*, jestliže existuje bijekce A na B, píšeme $A \approx B$;
- Říkáme, že množina A *má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny* B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Píšeme $A \preceq B$; relaci „$\preceq$“ říkáme *subvalence.*

Definice 7. Řekneme, že množina X je *nekonečná*, jestliže má stejnou mohutnost jako nějaká její vlastní podmnožina. V opačném případě říkáme, že X je *konečná.* Řekneme, že množina X je *spočetná*, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se zove *nespočetná.*

Věta 8 (Cantor–Bernstein)**.** Nechť A, B jsou množiny takové, že A má mohutnost menší nebo rovnu než B a B má mohutnost menší nebo rovnu než A. Pak mají stejnou mohutnost.

Příklady

1. Matematickou indukcí dokažte, že
   (a) $3 \mid (n^3 + 2n)$ (číslo 3 dělí výraz $n^3 + 2n$). Umíte dokázat i bez indukce?
   (b) Matematickou indukcí dokažte, že v konvexním n-úhelníku existuje právě $n(n-3)/2$ úhlopříček.
   (c) určete, od jakého n platí, že $2^n > n^2$ (a dokažte indukcí)
2. Dokažte že následující výroky jsou tautologie
   (a) $\neg(A \implies B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ (negace implikace)
   (b) $(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (alternativa implikace)

3. Nechť X, A a B jsou množiny. Dokažte, že
   (a) $\emptyset \subset A$
   (b) $A = B$, právě když $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.
   (c) de Morganovy vzorce:
      i. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
      ii. $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
4. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:
   (a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
   (b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
   (c) $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$
   (d) $X \times Y = Y \times X$
5. Ukažte, že pro konečnou množinu X je mohutnost její potenční množiny $|P(X)| = 2^{|X|}$.
6. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$. Je zobrazení f prosté, na? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \to [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?
7. Nechť A je množina všech vyrobených motorových vozidel a RA množina všech prodaných a zaregistrovaných motorových vozidel. Nechť SPZ je množina všech možných státních poznávacích značek motorových vozidel a $RSPZ$ je množina registrovaných státních poznávacích značek motorových vozidel.

   Uvažme dvě zobrazení

   $$f : A \to SPZ \qquad \text{(auto} \mapsto \text{jeho SPZ)}$$

   $$g : RA \to RSPZ \qquad \text{(auto} \mapsto \text{jeho SPZ)}$$

   Formulujte podmínku korektnosti definice obou zobrazení. Určete definiční obor a obor hodnot obou zobrazení, zda jsou daná zobrazení prostá a na. Formulujte podmínku existence inverzních zobrazení a rozhodněte, zda existuje.
8. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, nechť $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že

   $$f^{-1}(f(A)) = A, \qquad f(f^{-1}(B)) = B \qquad ?$$

   Platí některá z inkluzí $\subset$ či $\supset$?
9. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení?
   (a) Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
   (b) Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(c) Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

(d) Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

10. Na vhodném příkladě ukažte, že jsou-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zobrazení (funkce), pak obecně **neplatí** $f \circ g = g \circ f$.

11. Najděte zobrazení, která zobrazují:

    (a) interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,

    (b) interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$,

    (c) interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.

12. Mohutnosti

    (a) Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované níže je prosté:

    $$f(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y.$$

    (b) Dokažte, že $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

    (c) Dokažte, že $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

    (d) Dokažte, že $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$.

    (e) Dokažte, že $(0, 1) \approx \mathbb{R}$.

    (f) Dokažte, že $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$ a že $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.

13. Nechť A je množina všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$ a relace R je býti vlastní podmnožinou, tedy $X\,R\,Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci R jako množinu uspořádaných dvojic.

14. Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

    (a) A je množina lidí, R je relace "býti rodičem"

    (b) A je množina celých čísel, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$.

    (c) $A = \mathbb{N}$, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $i \cdot j$ je sudé.