21. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konveregnce Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ <u>monotónní</u> a spojitá. Pak platí:

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

(D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

Určete (v závislosti na parametru), zda daný integrál konverguje, respektive zda konverguje absolutně. Přitom uvažte $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctan } x}{x^a} \sin x \, dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \text{arccotg } x \sin x \, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^a \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)^b \text{tg }^c x \, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \text{arccotg }^\alpha x \cos x \, dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \text{arccotg }^\alpha x^5 \sin^5 x^\beta \, dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}{x^a} \sin x \, dx$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \text{arccos } \frac{x}{x+1} \sin x \, dx$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{x \text{arctan } (1-x)} \, dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctan }^\alpha x}{\ln^\beta(1+x)} \sin x \, dx$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)}{x^\alpha} \sin 2x \, dx$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctan }^\alpha x \text{ arccotg }^\beta x}{x^\gamma} \cos x \, dx$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \text{arctan }^a x^\alpha \text{arccotg }^\beta x^\gamma \text{arcsin } (\sin x) \, dx$