10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

   Řešení: Definiční obor funkce f je interval $(-1,1)$, stačí tedy určit primitivní funkci na tomto intervalu. Provedeme substituci $x = \sin t$. Protože $x \in (-1,1)$, je $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\sin t)' = \cos t \implies \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t,$$

   a protože $\cos t > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podle druhé věty o substituci máme

   $$\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^3 t} \cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^2 t} \overset{C}{=} \operatorname{tg} t =$$

   a s přihlédnutím k tomu, že pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$, dostaneme

   $$= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

   (b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

   Řešení: Je vidět, že $x \in (-a,a)$. Použijeme substituci $x = a\sin t$. Potom

   $$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x = \int a\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cos t\,\mathrm{d}t = \int a\sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}} \cos t\,\mathrm{d}t =$$

   $$= \int a(1+\sin t)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} at - a\cos t = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

   Řešení: Pro $a = 1$ byl příklad řešen výše, substitucí $a\sinh t$ lze použít i zde. Ukážeme si jiný postup, použijeme substituci $x = a\operatorname{tg} t$. Potom $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ a s přihlédnutím ke vztahu $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ platí

   $$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^3 \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{a^2} \cos t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{a^2} \sin t = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\mathrm{tg}\,^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} \Longrightarrow \sin^2 t = \frac{\mathrm{tg}\,^2 t}{1+\mathrm{tg}\,^2 t} \Longrightarrow \sin t = \frac{\mathrm{tg}\ t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,^2 t}}.$$

2. Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a\sinh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\cosh t \,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x = \int a^2 \cosh\,^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}\,(t + \cosh t \sinh t) =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2}$$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$

Řešení:

Použijeme substituci $x = a\cosh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\sinh t \,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x = \int a^2 \sinh\,^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}\,(\cosh t \sinh t - t) =$$

$$= -\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg\,cosh} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-a^2}.$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{2} a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-a^2}.$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

Řešení: Provedeme substituci $x = \sqrt{2}\cosh t$. Potom $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\sinh t \,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2\cosh\,^2 t}{\sqrt{2}\sinh t} \sqrt{2}\sinh t \,\mathrm{d}t = \int 2\cosh\,^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} (t + \sinh t \cosh t) =$$

$$= \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-2} \overset{C}{=} \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-2}$$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

Řešení: Použijeme substituci $x = a\sinh t$. Potom $\mathrm{d}x = a\cosh t \,\mathrm{d}t$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{a^2 \sinh\,^2 t}{a\cosh t} a\cosh t \,\mathrm{d}t = a^2 \int \sinh\,^2 t \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{a^2}{2}\,[t - \sinh t \cosh t] =$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{arg\,sinh} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2}$$

3. Směs

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1+e^x}$. Potom $\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{1+e^x}}{e^x}\,\mathrm{d}y$ a platí, že $e^x = y^2 - 1$. Odtud máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{e^x}\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} 2\ln\left|\frac{1-y}{1+y}\right| = 2\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}}\right|$$

(b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$

(c) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

4. Důležité:

(a) $f(x) = \dfrac{3}{5-2x}$

Řešení: Užijeme lineární substituce $y = 5-2x$ a získáme

$$\int \frac{3}{5-2x} = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ln|5-2x|$$

(b) $f(x) = \dfrac{-8}{(3+5x)^4}$

Řešení: Užijeme lineární substituci $y = 3+5x$, pak

$$\int \frac{-8}{(3+5x)^4} = -8\frac{-3}{(3+5x)^3}\cdot\frac{1}{5}$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2-3x^2}$

Řešení: Obdobně jako v předchozím příkladu

$$\int \frac{1}{2-3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}\,\mathrm{d}x =$$

položme $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ a podle věty o lineární substituci dostáváme

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=}$$

S přihlédnutím k výše vypočtenému pomocnému výsledku máme

$$\overset{C}{=} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \sqrt{\frac{1}{24}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|.$$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$

Řešení: Platí, že

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} \, \mathrm{d}x =$$

Použitím lineární substituce $t = x - \frac{1}{2}$ a předchozího příkladu (??) dostaneme, že

$$= \int \frac{1}{t^2 + \frac{7}{4}} \, \mathrm{d}t \overset{C}{=} \sqrt{\frac{4}{7}} \arctan \sqrt{\frac{7}{4}} t = \sqrt{\frac{4}{7}} \arctan \sqrt{\frac{4}{7}} \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{7}}$$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 2x - 1}$

Řešení: Platí, že

$$\int \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{9}} \, \mathrm{d}x$$

Použitím lineární substituce $t = x - \frac{1}{3}$ a příkladu (??) dostaneme, že

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2 - \frac{4}{9}} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{3t^2 - \frac{4}{3}} \, \mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{1}{2\sqrt{3 \cdot \frac{4}{3}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}t}{\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{3}t} \right| = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + 3t}{2 - 3t} \right| = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + 3x}{3 - 3x} \right|$$

Poznámka: uvědomte si, že stejně správné jsou i výsledky, kdy je změněné znaménko a v logaritmu prohozený čitatel se jmenovatelem, neboť

$$-\ln z = \ln \frac{1}{z}$$

Uvědomte si také, že čitatel či jmenovatel ve výsledku může být přenásoben libovolným číslem, neboť takové výsledky se liší o konstantu, protože je

$$\ln az = \ln z + \ln a = \ln z + C$$

(f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

Řešení: Použijeme následující rozklad

$$\frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

Důvod je následující: u prvního zlomku bychom rádi použili substituci jmenovatele $t = x^2 + x + 1$, k tomu potřebujeme v čitateli takový člen, aby se nám při substituci pokrátil. Protože $\mathrm{d}t = (2x + 1) \, \mathrm{d}x$, můžeme buď přičíst a odečíst x (taková úprava by se ale minula účinkem, neboť není jasné, co pak s druhým zlomkem) a nebo poupravit absolutního člen, jak jsme provedli výše.

Oba zlomky, resp. integrály nyní budeme vyšetřovat zvlášť. Na první nasadíme popsanou substituci, druhý budeme počítat jako v příkladech výše převedením jmenovatele na kanonický tvar.

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2} \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\operatorname{arctan}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

(g) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4-x^2+2}$

Řešení: Aplikujeme rozklad

$$\frac{x^3}{x^4-x^2+2} = \frac{x^3-\frac{1}{2}x}{x^4-x^2+2} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^4-x^2+2} = \frac{1}{4}\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+2} + \frac{1}{4}\frac{2x}{(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

První zlomek nyní máme připraven na substituci jmenovatele $t = x^4 - x^2 + 2$ a ve druhém můžeme substituovat $y = x^2$, abychom dostali tvar, v němž čitatel je číslo a jmenovatel kvadratický trojčlen v kanonickém tvaru. Platí tedy, že

$$\int \frac{1}{4}\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4}\ln|t| = \frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)$$

a pro druhý zlomek dostaneme, že

$$\int \frac{1}{4}\frac{2x}{(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{7}{4}}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right)^2}\,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{7}\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}\cdot\operatorname{arctan}\frac{y-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{2y-1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$$

Pokud dáme oba dílčí výsledky dohromady, máme

$$\int \frac{x^3}{x^4-x^2+2} = \int \frac{1}{4}\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{4}\frac{2x}{(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$$

5. Libovolné

(a) $f(x) = x^2\sqrt[3]{1-x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 - x$. Potom $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ a $x = 1 - y$ a platí

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x = \int (1-y)^2 y^{1/3}\,\mathrm{d}y = \int \left(y^{1/3} - 2y^{4/3} + y^{7/3}\right)\,\mathrm{d}y \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{3}{4}y^{4/3} - \frac{6}{7}y^{7/3} + \frac{3}{10}y^{10/3} = \frac{3}{4}(1-x)^{4/3} - \frac{6}{7}(1-x)^{7/3} + \frac{3}{10}(1-x)^{10/3}$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = 2 - x$. Potom $x = 2 - y$ a $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ a platí

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(2-y)^2}{y^{1/2}}\,\mathrm{d}y = -\int \left(4y^{-1/2} - 4y^{1/2} + y^{3/2}\right)\,\mathrm{d}y \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -8y^{1/2} + \frac{8}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -8\sqrt{(2-x)} + \frac{8}{3}\sqrt{(2-x)^3} - \frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5}$$

(c) $f(x) = \cos^5 x\sqrt{\sin x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}y$ a platí

$$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^2\sqrt{\sin x}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \int (1-y^2)^2 y^{1/2}\,\mathrm{d}y = \int \left(y^{1/2} - 2y^{5/2} + y^{9/2}\right.$$

$$\overset{C}{=} \frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{4}{7}y^{7/2} + \frac{2}{11}y^{11/2} = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x - \frac{4}{7}\sin^{7/2} x + \frac{2}{11}\sin^{11/2} x$$

(d) $f(x) = \dfrac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $\mathrm{d}x = \frac{1}{-\sin x}\,\mathrm{d}y$ a platí

$$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{y^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}y =$$

a protože platí

$$y^3 : (y^2+1) = y - \frac{y}{y^2+1}$$

můžeme dále psát (druhý integrál lze počítat třeba substitucí $z = y^2 + 1$)

$$= -\int y\,\mathrm{d}y + \int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$$

(e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1+\ln x}$. Potom platí, že

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \ln x = y^2 - 1$$

a s použitím těchto vztahů dostáváme

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x = 2\int (y^2-1)\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} \frac{2}{3}y^3 - 2y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x}$$

(f) $f(x) = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan\sqrt{x}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left[\arctan\sqrt{x}\right]' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

a proto

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\int y\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} y^2 = \arctan^2\sqrt{x}$$