3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. (a) $(1+i)^6$
   (b) $(5\sqrt{3}-5i)^7$
   (c) $\sqrt[2]{4}$
   (d) $\sqrt[5]{32}$
   (e) $e^{1+\pi i}$
   (f) $e^{2+\frac{\pi}{2}i}$
   (g) $e^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i}$
   (h) $\ln(1+i)$
   (i) $\ln(-1)$
   (j) $(-1)^i$
   (k) i^i
   (l) i^π
   (m) $\cos(\pi - i)$
   (n) $\cos(1+i\ln 2)$
   (o) $\sin(\pi + i)$
   (p) $\sin(\frac{\pi}{2} - i)$

2. Najděte reálnou a imaginární část funkce f, určete definiční obor a obor hodnot.

   (a) $f(z) = z + 1 - i$
   (b) $f(z) = \frac{i-1}{\sqrt{2}}z$
   (c) $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in [0, 2\pi]$
   (d) $f(z) = \frac{z}{|z|}$, $z \neq 0$
   (e) $f(z) = (z+i)^2$
   (f) $f(z) = e^{-iz}$

3. Dokažte, že

   (a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
   (b) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
   (c) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$

4. Popište množiny

   (a) Vnitřek 1. kvadrantu
   (b) Vnitřní oblast kružnice se středem v $1-i$, která se dotýká reálné osy
   (c) Množina kružnic, které se dotýkají imaginární osy v počátku

5. Charakterizujte geometrické vlastnosti funkcí

   (a) $f(z) = z + 1 - i$
   (b) $f(z) = -2z$
   (c) $f(z) = \frac{i-1}{\sqrt{2}}z$
   (d) $f(z) = iz$
   (e) $f(z) = e^{i\alpha}z$
   (f) $f(z) = \bar{z}$
   (g) $f(z) = \frac{z}{|z|}$

6. Obrazy

   (a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $|z| \geq 1$, určete, kam se zobrazí přímka $y = 2$.

(b) $f(z) = e^z$, $-\pi < \Im z \leq \pi$, určete, kam se zobrazí přímky rovnoběžné se souřadnými osami
(c) $f(z) = z^2$ na $\Im z > 0$. Najděte obraz přímky $y = 1$
(d) $f(z) = \frac{z+2}{z+1}$, Najděte obraz množiny $|z+1| > 1$
(e) $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, Najděte obrazy kružnic, které mají střed v počátku.

7. Určete, zda daná funkce je prostá na dané množině

   (a) $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, na $\mathbb{C}$.
   (b) $f(z) = z^2$ na $1 < |z| < 2$.
   (c) $f(z) = z^2$ na $|z - 1 + i| < 1$.
   (d) $f(z) = e^z$ na $|z| < 4$.
   (e) $f(z) = e^z$ na $-\pi < \Im z \leq \pi$.

8. K funkci na dané množině najděte funkci inverzní, některé mohou být mnohoznačné - popište inverzní funkce i tak

   (a) $f(z) = \frac{2z+1}{z-1}$ na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
   (b) $f(z) = iz + 1$ na $\mathbb{C}$.
   (c) $f(z) = z^2$ na $\mathbb{C}$.
   (d) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}$.
   (e) $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$.
   (f) $f(z) = \cos z$

9. Najděte všechna řešení rovnice

   (a) $w^2 = 1 + i\sqrt{3}$
   (b) $e^w = 1$
   (c) $e^w = -1$
   (d) $e^w = i - 1$
   (e) $\sin z = 0$
   (f) $\cos w = 0$
   (g) $\cos w = \frac{3}{4}i$
   (h) $\cos w = 2$

10. Vyjádřete algebraicky následující (mnohoznačné) zápisy

   (a) $(-1)^i$
   (b) $(-1)^{\sqrt{2}}$
   (c) 2^i
   (d) i^i

11. Pro zobrazení $f(z) = 1/\bar{z}$. (Pro většinu příkladů je nutno si vhodně zvolit parametrizaci kružnice či přímky, je naskenována v řešení.)

   (a) Porovnejte $|z| \cdot |f(z)|$ a $|w| \cdot |f(w)|$
   (b) Najděte obraz přímky, která neprochází počátkem
   (c) Najděte obraz přímky $y = 1$
   (d) Najděte obraz přímky, která prochází počátkem
   (e) Najděte obraz kružnice, která neprochází počátkem
   (f) Najděte obraz kružnice $|z - 2i| = 1$.
   (g) Najděte obraz kružnice $|z + i/4| = 1/4$.