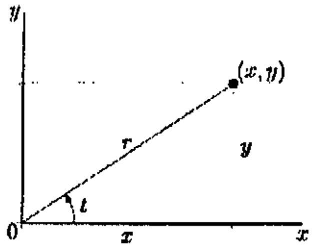


Přímým výpočtem zjistíme, že

$$J(r,t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$

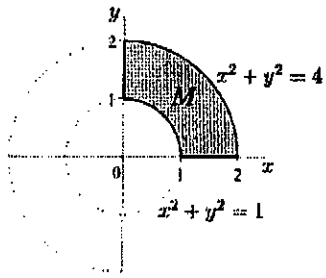
Poznámka 1.35. Tuto substituci lze zpravidla s úspěchem aplikovat v případech, že hranice množiny M, přes kterou integrujeme, obsahuje části kružnic. Vhodnost této substituce však také závisí na integrované funkci.

1

Příklad 1.36. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_M x \, dx \, dy$, kde

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; x \geqq 0 \;\wedge\; y \geqq 0 \;\wedge\; 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\right\}.$$

Řešení. Množina M je čtvrtina mezikruží se středem v počátku a s poloměry 1 a 2.



Bude proto vhodné zavést polární souřadnice

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t \qquad (J(r,t) = r).$$

Pokusíme se tedy množinu M popsat v těchto nových souřadnicích. Vzhledem ke geometrickému významu proměnné t snadno dostaneme první omezení $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$. Nyní si představme, že úhel t je zafixován a zkoumejme, jak se může měnit r (vzdálenost od počátku). Z obrázku vidíme, že $1 \leqq r \leqq 2$. Proto platí

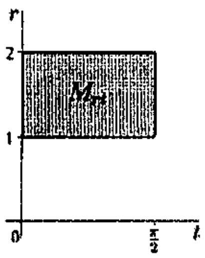
$$M = \left\{(r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2 \colon \; 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \;\wedge\; 1 \leqq r \leqq 2\right\}. \tag{1.2}$$

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$$

a

$$M_{rt} = \left\{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \colon \; 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \;\wedge\; 1 \leqq r \leqq 2\right\}.$$



Věta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r\cos t \cdot \underbrace{J(r,t)}_{r} \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left(\int_1^2 r^2 \,\mathrm{d}r \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}.$$

▲

Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě obrázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadaná. Přitom přihlédneme k tomu, že $r \geqq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

V našem případě bychom dostali

$$r\cos t \geqq 0, \quad r\sin t \geqq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leqq \underbrace{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leqq 4.$$

Z poslední podmínky (a $r \geqq 0$) získáme $1 \leqq r \leqq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geqq 0$ a $\sin t \geqq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

5.

Příklad 1.38. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq 2x \ \wedge\ x \leqq x^2 + y^2 \leqq 3x \right\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Řešení.

křivkou stačí počítat obsah pouze té části M, která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic. Dosazením (4) do nerovnice určující M dostaneme

$$0 \le (x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2,$$
$$0 \le r^4 \le r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi),$$
$$0 \le r \le \sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\phi} = \sqrt{\cos 2\phi}. \tag{7}$$

Z podmínky (7) dostáváme $0 \le r \le \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$\cos 2\phi \ge 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle. \tag{8}$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M, pro kterou je $x \ge 0$ a $y \ge 0$, tj.

$$\cos\phi \ge 0 \wedge \sin\phi \ge 0 \Rightarrow \phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Spolu s (8) tedy dostáváme $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Potom

$$\mu(M) = \int_M \mathrm{d}A = 4\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\phi\,\mathrm{d}\phi = 1\ .$$

2

Příklad 1.27. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$.

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$x = ar\cos\phi, \quad y = br\sin\phi \quad \text{a} \quad \boxed{J = abr,} \tag{9}$$

V zobrazení (9) (uvažovaném na množině $(0,+\infty) \times (0, 2\pi)$) má elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ rovnici $r = 1$.

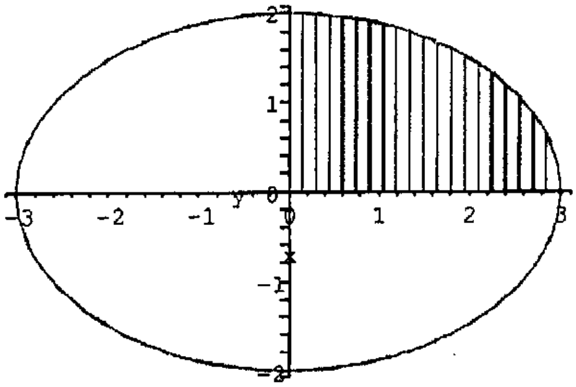
Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M, která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (9), kde $a = 3$, $b = 2$, tj.

$$\boxed{x = 3r\cos\phi, \quad y = 2r\sin\phi \quad \text{a } J = 6r,}$$

a dosazením do M (za podmínky $x \ge 0$, $y \ge 0$) dostaneme

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}.$$

2.



Obr. 11

Odtud

$$\mu(M) = \int\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A \;=\; 4\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^1 (9r^2\cos^2\phi + 4r^2\sin^2\phi)\,6r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi =$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi/2} \boxed{(9\cos^2\phi + 4\sin^2\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \underline{\frac{39}{2}\pi}\,.$$

Příklad 1.28. *Vypočítejme obsah části kuželové plochy $z=\sqrt{x^2+y^2}$, kterou z ní vytne parabolický válec $z^2=2x$ (Obr. 12).*

Řešení: Víme, že pro obsah S plochy P, která je částí grafu funkce $z=f(x,y)$, $(x,y)\in M$ platí

$$S = \int\limits_M \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}A. \tag{10}$$

V našem případě je plocha částí grafu funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Hranici množiny M najdeme jako (pravoúhlý) průmět průniku ploch $z=\sqrt{x^2+y^2}$ a $z^2=2x$ do roviny $z=0$

$$\sqrt{2x}=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{tj,} \quad x^2+y^2=2x,\ z=0.$$

Je tedy

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\le 1\right\}.$$

Množina M je tedy kruh se středem v bodě $(1,0)$ a poloměrem 1. Dále je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(3) VZOR

$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy \qquad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < x\}$

$x = r\cos\alpha \qquad \varphi(r,\alpha) \mapsto (x,y)$

$y = r\sin\alpha$

$\alpha \in (0,2\pi) \qquad \varphi : (0,2\pi)\times(0,\infty) \to$

$r \in (0,\infty) \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,\infty)\times\{0\}\}$

Možno i $\alpha \in (-\pi,\pi)$

$J_\varphi(r,\alpha) = r$

$\varphi^{-1}(M): \quad 0 < r^2 < r\cos\alpha$

$\underline{0 < r < \cos\alpha} \quad \to \cos\alpha > 0 \quad \to \underline{\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$

$\varphi^{-1}(M) = [r,\alpha] \in \mathbb{R}^2,\quad r \in (0,\cos\alpha),\ \alpha \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\varphi^{-1}(M)} \frac{1}{\sqrt{r^2}}\, r\,dr\,d\alpha =$$

$$\overset{\text{Fub}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\alpha} 1 \; dr\,d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha = \underline{\underline{2}}$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ a spočítáme Jakobián. Pro výpočet Jakobiánu použijeme předchozí poznámku. Je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 3v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{3v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \frac{1}{3v}$ dostaneme

$$\int_M \frac{y^3}{x^3}\,\mathrm{d}A = \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3}\frac{u}{v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{5\ln 2}{6}.$$

Příklad 1.24. *Vypočítejme dvojný integrál*

4

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge x \le y \le \sqrt{3}x\}$.

Řešení: Při výpočtu tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \quad \text{a } J = r. \tag{4}$$

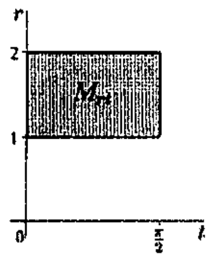
V našem případě je M (Obr. 7) obrazem obdélníku $N = \langle 1, 2\rangle \times \langle \pi/4, \pi/3\rangle$ jak zjistíme dosazením za x a y z (4) do nerovnic popisujících množinu M

$$\begin{array}{cc} 1 \le x^2 + y^2 \le 4, & x \le y \le \sqrt{3}x, \\ 1 \le r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi \le 4, & r\cos\phi \le r\sin\phi \le \sqrt{3}r\cos\phi, \\ 1 \le r \le 2, & 1 \le \operatorname{tg}\phi \le \sqrt{3}, \\ & \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{3}. \end{array}$$

Použitím věty o substituci ve dvojném integrálu a Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A &= \int_N \sqrt{r^2}\,r\,\mathrm{d}A = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{7}{3}\,\mathrm{d}\phi = \boxed{\frac{7}{36}\pi} \end{aligned}$$

Příklad 1.25. *Vypočítejme objem tělesa, které je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 = x + y$, $z = x + y$ *a* $z = 0$.



(1)

Věta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r\cos t \cdot \underbrace{J(r,t)}_{r} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \left(\int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}.$$

▲

Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě obrázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadaná. Přitom přihlédneme k tomu, že $r \geqq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi)$.

V našem případě bychom dostali

$$r\cos t \geqq 0, \quad r\sin t \geqq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leqq \underbrace{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}_{r^2} \leqq 4.$$

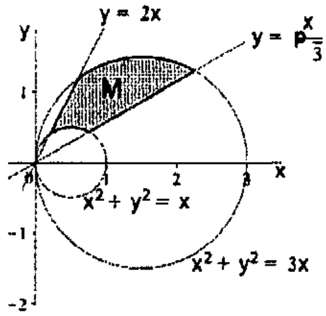
Z poslední podmínky (a $r \geqq 0$) získáme $1 \leqq r \leqq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geqq 0$ a $\sin t \geqq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi)$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

(5.)

Příklad 1.38. Vypočtěte integrál $I = \iint_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq 2x \ \wedge \ x \leqq x^2 + y^2 \leqq 3x \right\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Řešení.



5

Provedeme transformaci do polárních souřadnic. Protože pro každé $(x, y) \in M$ platí $x > 0$ a $y > 0$, ze vztahů $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ (a $r \geqq 0$, $t \in \langle 0, 2\pi)$) plyne $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $r > 0$. Z podmínky $\frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq 2x$ plyne

$$\frac{r\cos t}{\sqrt{3}} \leqq r\sin t \leqq 2r\cos t,$$

odkud

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq \operatorname{tg} t \leqq 2,$$

tj. $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2\rangle$. Podobně, z podmínky $x \leqq x^2 + y^2 \leqq 3x$ obdržíme

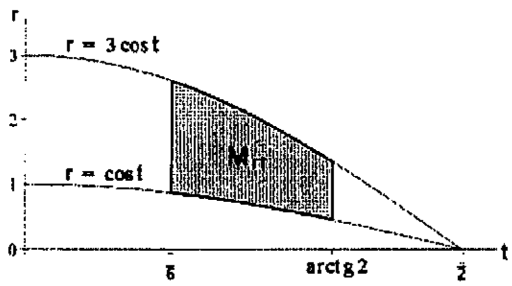
$$r\cos t \leqq \underbrace{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}_{r^2} \leqq 3r\cos t,$$

což dává nerovnost $\cos t \leqq r \leqq 3\cos t$.
Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi)$$

a

$$M_{rt} = \left\{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2\rangle \ \wedge \ \cos t \leqq r \leqq 3\cos t\right\}.$$



Podle věty 1.30 a Fubiniovy věty 1.22 máme

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3\cos t} \frac{1}{(r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2} \cdot r \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3\cos t} \frac{1}{r^3} \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=\cos t}^{3\cos t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9\cos^2 t} - \frac{1}{\cos^2 t} \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4}{9} [\operatorname{tg} t]_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{4}{9} \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{9} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8}{9} - \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

I.

▲

Domácí cvičení 1.39. Pokuste se na omezení

$$t \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle \quad \text{a} \quad \cos t \leqq r \leqq 3 \cos t$$

z předchozího příkladu přijít pouze na základě geometrické úvahy.

1.4.4 Substituce do zobecněných polárních souřadnic

Tentokrát uvažujme substituci

$$x = a \cdot r \cos t,$$
$$y = b \cdot r \sin t,$$

kde $a, b > 0$ jsou konstanty, $r \geqq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi)$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi)$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).

Přímým výpočtem opět zjistíme

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = ab \cdot r \cos^2 t + ab \cdot r \sin^2 t = ab \cdot r.$$

Poznámka 1.40. Substituci do zobecněných polárních souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice oblasti, přes kterou integrujeme, má eliptický tvar (a, b jsou poloosy zmíněné elipsy).

Příklad 1.41. Vypočtěte integrál $\iint\limits_M (x - 2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \ \wedge \ 0 \leqq x \leqq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$

Řešení.

Nyní máme dokázáno tvrzení v případě nezáporné funkce f. Je-li f obecná, napíšeme ji jako rozdíl kladné a záporné části, $f = f_+ - f_-$, kde

$$f_+ = \max\{f, 0\}, \quad \text{a} \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Aplikací již dokázaného tvrzení na (nezáporné) funkce f_+ a f_- dostaneme obecný případ.
□

Poznámka 3.13. Předpoklady ve Větě 3.12 bychom mohli zeslabit na to, že funkce f může být spojitá jen na vnitřku $\Phi(T)$ a transformace Φ by stačila být třídy C^1 na vnitřku T. Použili bychom stejný „nafukovací princip" pro vyplnění množin T a $\Phi(T)$ jako na konci Kapitoly 2, viz (2.11).

Ještě než přikročíme k příkladům, vrátíme se na chvíli na začátek této kapitoly. Zavedli jsme tam polární souřadnice a protože poměrně často se s výhodou používají, vypočteme si jejich jakobián. Přechod k polárním souřadnicím reprezentuje zobrazení

$$\Phi(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varrho \geq 0, \ \varphi \in \langle 0, 2\pi).$$

Jacobiho matice je pak

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varrho} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\phi & \varrho\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Odtud jakobián

$$\Delta_\Phi = \det J_\Phi = \varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \varrho.$$

3 Cvičení.

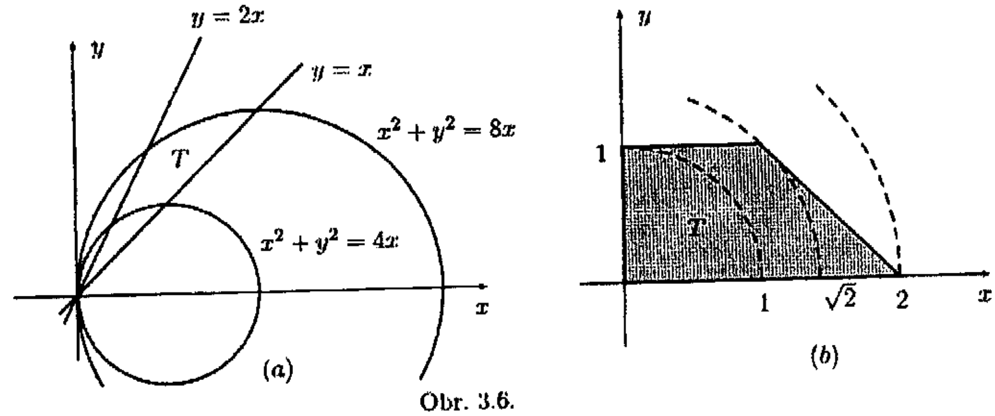
6.

Úloha. Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2},$$

kde T je množina omezená křivkami $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$, $y = x$ a $y = 2x$.

Řešení. Množina T má tvar ukázaný na obr. 3.6(a).



Obr. 3.6.

Přejdeme-li k polárním souřadnicím $x = \varrho\cos\varphi$ a $y = \varrho\sin\varphi$, pak integrovaná funkce bude mít tvar

$$f = \frac{1}{(\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi)^2} = \frac{1}{\varrho^4}.$$

Stejně tak rovnice křivek omezující množinu T budou mít v polárních souřadnicích vyjádření

$$\begin{aligned}
\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi &= 4\varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \varrho = 4\cos\varphi\\
\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi &= 8\varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \varrho = 8\cos\varphi\\
\varrho\sin\varphi &= \varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}\varphi = 1\\
\varrho\sin\varphi &= 2\varrho\cos\varphi \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}\varphi = 2
\end{aligned}$$

Množina T je tak v polárních souřadnicích určena požadavky $\varphi \in \langle \operatorname{arctg} 1, \operatorname{arctg} 2\rangle = \langle \pi/4, \operatorname{arctg} 2\rangle$ a $\varrho \in \langle 4\cos\varphi, 8\cos\varphi\rangle$. Protože jakobián je ϱ, můžeme podle Věty 3.12 psát

$$\iint\limits_T \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2}\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{1}{\varrho^4}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \left[-\frac{1}{2\varrho^2}\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi =$$

6

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{3}{128\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{128}\,[\operatorname{tg}\varphi]_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{3}{128}.$$

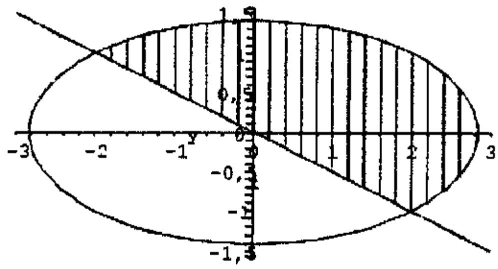
Úloha. Vyjádřete integrál

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{2-y} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

v polárních souřadnicích při obou možnostech pořadí integrace.

Řešení. Nejprve musíme zjistit tvar oblasti T přes kterou se integrace provádí: z tvaru mezí u vnějšího a vnitřního integrálu vidíme, že

$$0 \le y \le 1, \qquad 0 \le x \le 2 - y.$$



Obr. 6

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$x \le y \le x+1 \wedge 1-x \le y \le 2-x\,,$$

tj.

(1) $$0 \le y-x \le 1 \wedge 1 \le y+x \le 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = y-x$ a $v = y+x$. Dosazením u a v do (1) dostaneme

$$0 \le u \le 1 \quad \wedge 1 \le v \le 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \frac{1}{2}(v-u)$ a $y = \frac{1}{2}(v+u)$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\int\limits_M 4xy\,\mathrm{d}A = \int_1^2 \int_0^1 (v-u)(u+v)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2\int_0^1 (v^2-u^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1.$$

7

Příklad 1.22. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\boxed{\int\limits_M x^2y^2\,\mathrm{d}A,}$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : \frac{1}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y \le 2x\right\}.$

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{1}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y \le 2x,$$

tj.

(2) $$1 \le xy \le 2 \wedge 1 \le \frac{y}{x} \le 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$1 \le u \le 3 \quad \wedge 1 \le v \le 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{uv}}{v^2} \\ \frac{1}{2}\frac{v}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \frac{1}{2v}$ dostaneme

7

$$\int_M x^2y^2 \,\mathrm{d}A = \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{u^2}{v} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \frac{13 \ln 2}{2}.$$

Poznámka: Při řešení předchozího příkladu byl asi nejpracnější výpočet Jakobiánu. Při jeho výpočtu jsme si ale mohli usnadnit práci, kdybychom využili vlastnosti regulárního zobrazení a zobrazení k němu inverzního. Platí totiž

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x(u,v), y(u,v))}.$$

Pro $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ je tedy

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ pak dostáváme $J(x(u,v), y(u,v)) = 2v$. Odtud pak

$$J(u,v) = \frac{1}{2v}.$$

Příklad 1.23. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M \frac{y^3}{x^3} \,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y^2 \le 2x\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{2}{x} \le y \le \frac{3}{x} \wedge x \le y^2 \le 2x,$$

tj.

$$2 \le xy \le 3 \wedge 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2. \tag{3}$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y^2}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$2 \le u \le 3 \quad \wedge 1 \le v \le 2.$$

Podle věty 1.30 a Fubiniovy věty 1.22 máme

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3\cos t} \frac{1}{(r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2} \cdot r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3\cos t} \frac{1}{r^3} \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=\cos t}^{3\cos t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9\cos^2 t} - \frac{1}{\cos^2 t} \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4}{9} \left[\operatorname{tg} t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{4}{9} \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{9} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8}{9} - \frac{4\sqrt{3}}{27}.$$

▲

Domácí cvičení 1.39. Pokuste se na omezení

$$t \in \langle \tfrac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle \quad \text{a} \quad \cos t \leqq r \leqq 3\cos t$$

z předchozího příkladu přijít pouze na základě geometrické úvahy.

1.4.4 Substituce do zobecněných polárních souřadnic

Tentokrát uvažujme substituci

$$x = a \cdot r \cos t,$$
$$y = b \cdot r \sin t,$$

kde $a, b > 0$ jsou konstanty, $r \geqq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).

Přímým výpočtem opět zjistíme

$$J(r,t) = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = ab \cdot r\cos^2 t + ab \cdot r \sin^2 t = ab \cdot r.$$

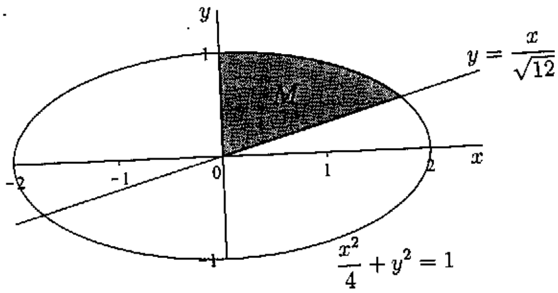
Poznámka 1.40. Substituci do zobecněných polárních souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice oblasti, přes kterou integrujeme, má eliptický tvar (a, b jsou poloosy zmíněné elipsy).

Příklad 1.41. Vypočtěte integrál $\iint_M (x - 2y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$, kde

8.

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \ \wedge \ 0 \leqq x \leqq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$

Řešení.



Použijeme zobecněné polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2r\cos t, \\ y &= r\sin t, \end{aligned} \qquad \big(J(r,t) = 2r\big).$$

Podmínka $0 \leqq x \leqq \sqrt{12}\cdot y$ pak dává $0 \leqq 2r\cos t \leqq \sqrt{12}\cdot r\sin t$ a $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Odtud snadno

$$\operatorname{cotg} t \leqq \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}.$$

Proto dostáváme, že $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Podmínka $\frac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1$ dává

$$\underbrace{\frac{4r^2\cos^2 t}{4} + r^2\sin^2 t}_{r^2} \leqq 1,$$

odkud (vzhledem k podmínce $r \geqq 0$) máme $0 \leqq r \leqq 1$. Podle věty 1.30 tedy platí

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (2r\cos t - 2r\sin t)\cdot 2r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 4r^2(\cos t - \sin t)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t =$$

$$4\cdot \left(\int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t)\,\mathrm{d}t \right) = 4\cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\sin t + \cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\cdot \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{3}\right).$$

P.

▲

Poznámka 1.42. Všimněme si, že jsme užili tvrzení věty 1.30 (o substituci dvojného integrálu), a to přesto, že nebyly splněny všechny její předpoklady.

Zobrazení $\Phi(r,t) = (2r\cos t, r\sin t)$ totiž zobrazuje celou úsečku $\{0\} \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\rangle$ do bodu $(0,0)$ (tj. zobrazení Φ není prosté) a navíc $J(0,t) = 0$.