25. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *P*arciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Definice 2. Derivace (totální diferenciál)

Nechť je dána reálná funkce n-proměnných $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Pokud existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

potom toto lineární zobrazení L značíme $df(a)$ nebo také $f'(a)$ a nazýváme jej **derivací** nebo také **totálním diferenciálem** funkce f v bodě a. Zobrazení, které bodu a přiřazuje $df(a)$, resp. $f'(a)$, značíme df, resp. f' a nazýváme jej diferenciálem funkce f.

Věta 3. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál $df(a)$ v bodě a. Potom $df(a)$ je lineární zobrazení, které vektoru $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje číslo $df(a)(h)$ a platí, že

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i.$$

Věta 4. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě a. Potom funkce f má v bodě a totální diferenciál určený předpisem

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} dx_i.$$

Příklady

1. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí

   (a)
   $$x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$$

   (b)
   $$\sin(x^2 + y^2)$$

   (c)
   $$\ln(x + y)$$

   (d)
   $$f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$$

   (e)
   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (0, 0) \end{cases}$$

2. Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0, 0)$:

   (a) $|y| \sin x$

   (b) $\cos \sqrt[3]{xy}$

   (c) $\sqrt{|x|^3 + |y|^3}$

   (d) $\sqrt[3]{xy}$

3. Ukažte, že splňuje-li funkce $f(x, y, z)$ Laplaceovu rovnici, tj. rovnici $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$, pak ji splňuje i funkce $g(x, y, z) = \frac{1}{r} f(\frac{k^2x}{r^2}, \frac{k^2y}{r^2}, \frac{k^2z}{r^2},)$, kde $r^2 = x^2+y^2+z^2$ a $k \in \mathbb{R}$ je lib. konstanta.