10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (O rozkladu na parciální zlomky)**.** Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) stupeň polynomu P je menší než stupeň polynomu Q,

(ii) polynom Q lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l},$$

(iii) čísla $a_n \neq 0$, $x_1, \dots, x_k$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ a $\beta_1, \dots, \beta_l$ jsou reálná a čísla $p_1, \dots, p_k$ a $q_1, \dots, q_l$ jsou přirozená,

(iv) žádné dva z mnohočlenů

$$(x-x_1), \dots, (x-x_k),\ (x^2+\alpha_1 x+\beta_1), \dots, (x^2+\alpha_l x+\beta_l)$$

nemají společný kořen,

(v) kvadratické trojčleny

$$(x^2+\alpha_1 x+\beta_1), \dots, (x^2+\alpha_l x+\beta_l)$$

nemají žádný reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla

$$A_{1,1}, \dots, A_{1,p_1}, A_{2,1}, \dots, A_{2,p_2}, \dots, A_{k,1}, \dots, A_{k,p_k},$$

$$B_{1,1}, C_{1,1}, \dots, B_{1,q_1}, C_{1,q_1}, \dots, B_{l,1}, C_{l,1}, \dots, B_{l,q_l}, C_{l,q_l}$$

taková, že platí:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-x_1)^1} + \dots + \frac{A_{1,p_1}}{(x-x_1)^p_1} + \dots + \frac{A_{k,1}}{(x-x_k)^1} + \dots + \frac{A_{k,p_k}}{(x-x_1)^{p_k}} +$$

$$+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^1} + \dots + \frac{B_{1,q_1}x+C_{1,q_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^1} + \dots + \frac{B_{l,q_l}x+C_{l,q_l}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}.$$

Příklady

1. $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$
2. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$
4. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-3x+2}\right)^2$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^4+x^2+1}$