2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Vlastnosti o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže $f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a$, pak
$$(f_1 + f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(b) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a$, pak
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$

(c) Jestliže $f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$, pak
$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Poznámka 2.

1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n.*
2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Příklady

Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

   Řešení: Sledujte výpočet.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^5))}{x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} - \frac{1}{4}\frac{1}{2!} + o(x) = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{12}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

   Řešení: Sledujte výpočet.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$

Řešení: Protože platí $a^x = e^{x \ln a}$, je

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

a dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a - 2 + o(x^2)}{x^2} = \ln^2 a.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$

Řešení: Převedeme na společný jmenovatel a rozvineme funkci sinus v čitateli a uvidíme.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{\sin x} \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{x \sin x} o(x^2) \right) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right)$

Řešení: Funkci kotangens napíšeme ve tvaru podílu, převedeme na společný jmenovatel a zkusíme nějaký rozvoj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} =$$

Jmenovatel se chová jako $x^2 \sin x \approx x^3$, takže zkusíme čitatel rozvést do třetího řádu.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x + \frac{x^3}{2!} + o(x^4)}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} \frac{x}{\sin x} + \frac{x}{\sin x} o(x) \right) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do pátého řádu. Platí, že

$$\sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^5 + o(x^6) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) - \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^6))}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{+\frac{1}{10}x^5 + o(x^6) + \frac{1}{9}x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}.$$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

Řešení:

Jde okamžitě pomocí l'Hopitalova pravidla. Taylor ale také ihned dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{1 + 3\cdot\frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + 6\cdot\frac{o(x^3}{x^3}} = 2\cdot\frac{1+3\cdot 0}{1+6\cdot 0} = 2.$$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\operatorname{arctan}^3 x}$

Řešení: Předně provedeme jednoduchý trik. Platí, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctan} x} = 1$$

(jak plyne například ihned z l'Hopitalova pravidla). Proto, pokud existuje limita napravo, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\operatorname{arctan}^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\operatorname{arctan}^3 x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3}.$$

Nyní zkusíme rozvinout čitatel do třetího řádu. Dostaneme

$$e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x = 1 + (x^2+x) + \frac{(x^2+x)^2}{2!} + \frac{(x^2+x)^3}{3!} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - 4 + o(x^3) =$$

$$= 2\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Hledaná limita je tedy rovna

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} = \frac{4}{3}.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

Řešení: Nejjednodušší je provést dvakrát l'Hopitalovo pravidlo. Nicméně Taylorův rozvoj je také rychlý.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

Řešení: Podle základních limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

můžeme ihned psát (existuje-li limita napravo), že

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)^2 \frac{\sin^4 x}{x^4}} \cdot \frac{1}{x^8} = \lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{x^8} =$$

A nyní rozveďme čitatel.

$$e^{x^2} - 1 = 1 + x^2 - 1 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies (\sin x - x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6)$$

a dohromady dostaneme

$$(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2 = \frac{x^8}{36} + o(x^8)$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{x^8} = \lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{\frac{1}{36}x^8 + o(x^8)}{x^8} = \frac{1}{9}.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

Řešení:

Protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2) - 1}{(-x^2)} = 1,$$

platí rovnost (existuje-li limita napravo)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} =$$

což, rozvineme-li čitatel do pátého řádu, dává

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5)) + x^3 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{4}.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \arctan x - x}$

Řešení: Například z definice Taylorova polynomu můžeme odvodit, že platí

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \arctan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) - x + o(x^6)}{2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) - x + o(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{20}x^5 - \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{-11}{60}} = -\frac{1}{11}.$$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(\cos x)} = e^{(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))\cdot(\ln(1 - x^2/2 + o(x^3))} =$$

$$= e^{(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))\cdot(-x^2/2 + o(x^3))} = e^{-x^3/2 + o(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - x^3/2 + o(x^3))}{x^3} = \frac{1}{2}.$$