7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$
   Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

Posloupnost x_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $x_{n+1} > x_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $x_n \leq 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu L. Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\lim x_{n+1} = \lim \sqrt{2 + x_n}$$

$$L = \sqrt{2 + L}$$

$$L = 2.$$

   (b)

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Řešení: Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu L, potom musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo -1 nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy minus jednička nepřichází v úvahu.

Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou x_0 je větší než 1.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x_n^2}{x_n}\right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

(c) Nechť $0 \leq a \leq 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

Řešení: Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a vše je jasné. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro x_1. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) \\ &= \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Přitom evidentně $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.

Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé n přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost x_n je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Řešení:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e,$$

tedy lze nalézt n tak, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 10.$$

Zároveň zjevně

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

n-tá odmocnina tuto nerovnost nepokazí (promyslete) a tak můžeme odhadovat

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \lim_{n\to\infty} \leq \sqrt[n]{10} = 1,$$

takže z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

Řešení:
Použijeme větu o součinu omezené a mizející posloupnosti, $1 \geq \sin n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

Řešení: Tato posloupnost limitu nemá, neb členy začnou být záhy záporné pod odmocninou a tedy nejsou definované.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^\alpha} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4} = \lim_{n\to\infty} 3^4 n^4 \frac{(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^2 + (1 + \frac{2}{3n})^4}{n^\alpha + n^4} = \begin{cases} 81/2, & \alpha = 4 \\ 0, & \alpha > 4 \\ 81, & \alpha < 4 \end{cases}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$ **Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^4 - 2 \cdot 4n^3 + \cdots + 2^4)^4 - (n^4 + 2n^2 + 1)}{n^\alpha + n^2}$$

$$= \begin{cases} -8, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ -\infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(g)
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right),$$
kde $\alpha\in\mathbb{R}$

Řešení: Odstraněním odmocniny z čitatele pomocí vhodného rozšíření (viz jmenovatel následujícího zlomku) máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)\\
&\quad=\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}}\\
&\quad=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^\alpha}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}}
\end{aligned}$$

a vytknutím $n^{4/3}$ ze jmenovatele dostaneme

$$=\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$

a) Pro $\alpha=4/3$ vyjde

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

b) Pro $\alpha>4/3$ vyjde

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}\\
&\qquad=(+\infty)\cdot\frac{2}{3}=+\infty
\end{aligned}$$

c) Pro $\alpha<4/3$ vyjde

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}\\
&\qquad=0\cdot\frac{2}{3}=0.
\end{aligned}$$

(h) Určete $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n}-an-b)=0$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n}-an-b)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n-(an+b)^3}{(n^3-n)^{2/3}+(n^3-n)^{1/3}(an+b)+(an+b)^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n-(a^3n^3+3a^2n^2b+3anb^2+b^3)}{(n^3-n)^{2/3}+(n^3-n)^{1/3}(an+b)+(an+b)^2}
\end{aligned}$$

Vedoucí člen ve jmenovateli je n^2, v čitateli $n^3(1-a^3)$. Aby byla limita vlastní, musí být $a=1$. Pak v čitateli zbývá $3a^2n^2b$, což též musí zmizet, jinak by limita byla >0. Tedy $b=0$.

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha} \frac{(1+\frac{1}{n^\alpha})^3+\frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}}{n^2} \cdot n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha-1}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^3+\frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right]\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \begin{cases} 2, & \alpha = 1/3 \\ \infty, & \alpha > 1/3 \\ 0, & \alpha < 1/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n}-2n)$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n}-2n) &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n}-2n)\cdot\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)+1}{(n+2)-1} = 1.$$

(l)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi)$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi) \overset{VOAL}{=} 1 + \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 1 + 0 = 1.$$