Úlohy z Lineární algebry 2 pro informatiky

Alexandr Kazda

May 13, 2010

Následující úlohy zhruba odpovídají látce probírané na jednotlivých hodinách (ovšem jsou hodně praktické – ke zkoušce budete potřebovat i teorii). Pokud je řešíte jako domácí úkoly pro nahrazení bodů, nezapomeňte podrobně popsat postup, jakým jste došli k výsledku!

Úloha 1.
Nad $\mathbb{R}$ najděte množinu řešení soustavy lineárních rovnic dané maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Úloha 2.
Nad $\mathbb{C}$ spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} i & 3 & 4+i \\ 2 & 0 & -i \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix}.$$

Úloha 3.
Nad $\mathbb{R}$ najděte matici adjungovanou k matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4.
V $\mathbb{R}^3$ určete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory:

$$\begin{aligned} u &= (2,4,-1)^T \\ v &= (1,2,0)^T \\ w &= (0,3,-1)^T. \end{aligned}$$

Úloha 5.
Nad $\mathbb{Z}_5$ vydělte se zbytkem polynomy

$$x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 1 : x^2 + 4x + 2.$$

Úloha 6.
Nad $\mathbb{C}$ najděte všechny kořeny polynomu: $p(x) = x^6 + x^4 + x^2$. U každého nalezeného kořene určete jeho násobnost.

Úloha 7.
Najděte všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, pro která je matice

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

singulární.

Úloha 8.
Nad $\mathbb{C}$ určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 0 & 2 & 2-2i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 9.
Diagonalizujte matici z předchozí úlohy, tj. najděte B, D matice, D diagonální, že je $A = BDB^{-1}$.

Úloha 10.
Spočtete A^{10000}, kde A je matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 11.
Rozhodněte, zda zobrazení $\langle u|v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2}$ určuje skalární součin na $\mathbb{C}^3$.

Úloha 12.
V $\mathbb{C}^3$ s obvyklým skalárním součinem popište množinu vektorů v splňujících $\langle v|(1,1,i)^T\rangle = 0$.

Úloha 13.
V $\mathbb{R}^4$ s obvyklým skalárním součinem spočtěte kolmou projekci vektoru $(1,2,-1,0)^T$ do podprostoru generovaného vektory $(1,1,1,1)^T$ a $(0,2,1,0)^T$.

Úloha 14.
Najděte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$