

Cvičení 17. 5. 2013

Dobrá aproximace čísla $\alpha \in \mathbb{R}$ je zlomek p/q takový, že chyba $q|\alpha - p/q|$ je minimální možná pro jmenovatele $\leq q$ (aby nám seděla korespondence s řetězovými zlomky, tak dodatečně prohlásíme $1/0$ a $[\alpha]$ za dobré aproximace).

Posloupnost konvergentů řetězového zlomku pro α a dobré aproximace jedno jsou: Pokud $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ je čistý řetězový zlomek pro α , tak i -tá dobrá aproximace α je rovna $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{i-1}]$.

Ze zápisu $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ můžeme spočítat konvergenty r_i/s_i pomocí rekursivního vztahu:

$$\begin{aligned}r_0 &= 1, s_0 = 0 \\r_1 &= b_0, s_1 = 1 \\r_i &= r_{i-1}b_{i-1} + r_{i-2} \\s_i &= s_{i-1}b_{i-1} + s_{i-2}\end{aligned}$$

Příklad 1. Napište pomocí vztahů výše posloupnost konvergentů řetězového zlomku:

1. $[1; 1, 1, 1, 1]$
2. $[1; 1, 2, 2]$
3. $[1; 4, 6, 17]$
4. $[1; 56, 2, 3]$

Příklad 2. Najděte první tři dobré aproximace (divná aproximace $1/0$ je nultá; tu vynechejte) čísla:

1. $13/21$
2. $115/37$
3. $\sqrt{7}$
4. e (pokud máte kalkulačku)

Příklad 3. Jaké a/b byste doporučili jako přibližné řešení rovnice $2^{a/b} = 2/3$, aby $b < 30$?

Příklad 4. Jak spolu souvisí vyjádření a a $1/a$ ve tvaru řetězového zlomku?

Příklad 5. Dokažte, že pokud je p/q , $q > 1$ dobrá aproximace nějakého α , tak jsou p a q nesoudělná.

Příklad 6. Zformulujte souvislost mezi posloupností konvergent řetězového zlomku pro a/b a čísla vystupujícími v Euklidově algoritmu pro výpočet $NSD(a, b)$.

Kreativní příklady

Příklad 7. Najděte číslo α a jeho dobrou aproximací p/q tak, aby platilo

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{2q^2}.$$

Příklad 8. Odhadněte shora, jak rychle v závislosti na n klesá číslo $|\alpha - p_n/q_n|$, kde p_n/q_n je n -tý konvergent řetězového zlomku