Cvičení 10. 5. 2013

Řetězový zlomek je výraz tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

tedy je to limita posloupnosti takzvaných konvergentů

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Takový zlomek se zapisuje také jako $[a_0; a_1, \dots]$, kde posloupnost může být konečná i nekonečná. Typicky povolujeme $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ a kvůli jednoznačnosti vyžadujeme, aby konečný řetězový zlomek různý od 1 nekončil jedničkou. Takovým zlomkům říkáme čisté.

Pomocí konvergentů lze překvapivě přesně aproximovat reálná čísla.

Jak vyrobit řetězový zlomek pro číslo $x \in \mathbb{R}$:

1. Najdeme $a_0 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $x - a_0 \in [0, 1)$. Položme $e_1 = x - a_0$
2. Pokud e_i není 0, tak položme $a_i = \lfloor \frac{1}{e_i} \rfloor$, $e_{i+1} = \frac{1}{e_i} - a_i$ a zvýšíme i o 1.
3. Pro racionální x se algoritmus zastaví a my doplníme zbytek posloupnosti nulami, pro iracionální x je výsledkem nekonečná posloupnost.

Základní fakta o řetězových zlomcích:

Věta 1. Každé číslo má jednoznačné vyjádření ve tvaru čistého řetězového zlomku.

Věta 2. Každému čistému řetězovému zlomku odpovídá nějaké reálné číslo, které je limitou posloupnosti jeho konvergentů.

Věta 3. Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$ a platí

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

pak je zlomek $\frac{p}{q}$ konvergentem pro α.

Věta 4. Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$ a p/q je nějaký konvergent pro řetězový zlomek pro α (p, q nesoudělná), tak

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2},$$

Příklad 1. Jakým číslům odpovídají řetězové zlomky:

1. $[1; 2, 3, 4]$,
2. $[-3; 3, 3, \dots]$,
3. $[1; 13, 7]$,
4. $[1; 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$?

Příklad 2. Napište řetězový zlomek pro $4/9$, $31/27$, $(1+\sqrt{5})/2$ a pro $\sqrt{2}$.

Příklad 3. Spočtěte $[1; 1, \dots, 1]$, kde jedniček je n.

Příklad 4. Spočtěte $[a; a, a, a, \dots]$ pro $a \in \mathbb{N}$ libovolné.

Kreativní úlohy

Příklad 5 (převzato z poznámek k přednášce)**.** Při experimentu jsme dostali hodnotu 0.15328, o které víme, že vznikla zaokrouhlením (s přesností na stotisíciny, tj. chybou maximálně $5 \cdot 10^6$) podílu neznámých nejvýše osmibitových čísel. Najděte tento podíl.

Příklad 6. Buďte $a, b \in \mathbb{N}$. Zjistěte, jak spolu souvisí výpočet konvergentů pro a/b a Euklidův algoritmus pro $NSD(a, b)$.