Cvičení 24. 5. 2012

Řetězový zlomek je výraz tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

tedy je to limita posloupnosti takzvaných konvergent

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\vdots \over a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}.$$

Takový zlomek se zapisuje také jako $[a_0; a_1, \dots]$, kde posloupnost může být konečná i nekonečná. Typicky povolujeme $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ a kvůli jednoznačnosti vyžadujeme, aby konečný řetězový zlomek různý od 1 nekončil jedničkou. Takovým zlomkům říkáme dobré.

Pomocí konvergentů lze překvapivě přesně aproximovat reálná čísla.

Jak vyrobit řetězový zlomek pro číslo $x \in \mathbb{R}$:

1. Najdeme $a_0 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $x - a_0 \in [0, 1)$. Položme $e_1 = x - a_0$
2. Pokud e_i není 0, tak položme $a_i = \lfloor \frac{1}{e_i} \rfloor$, $e_{i+1} = \frac{1}{e_i} - a_i$ a zvýšíme i o 1.
3. Pro racionální x se algoritmus zastaví a my doplníme zbytek posloupnosti nulami, pro iracionální x je výsledkem nekonečná posloupnost.

Základní fakta o řetězových zlomcích:

Věta 1. Každé číslo má jednoznačné vyjádření ve tvaru čistého řetězového zlomku.

Věta 2. Každému čistému řetězovému zlomku odpovídá nějaké reálné číslo, které je limitou posloupnosti jeho konvergent.

Věta 3. Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$ a platí

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

pak je zlomek $\frac{p}{q}$ konvergentem pro α.

Věta 4. Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$ a p/q je nějaký konvergent pro řetězový zlomek pro α (p, q nesoudělná), tak

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2},$$

Příklad 1. Jakým číslům odpovídají řetězové zlomky:

1. $[1; 2, 3, 4]$
2. $[-3; 3, 3, \dots]$
3. $[1; 13, 7]$
4. $[1; 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$

Příklad 2. Napište řetězový zlomek pro $4/9$, $31/27$, $(1+\sqrt{5})/2$ a pro $\sqrt{2}$.

Příklad 3. Spočtěte $[1; 1, \dots, 1]$, kde jedniček je n.

Příklad 4. Spočtěte $[a; a, a, a, \dots]$ pro $a \in \mathbb{N}$ libovolné.

Příklad 5 (převzato z poznámek Štěpána Holuba)**.** Při experimentu jsme dostali hodnotu 0.15328, o které víme, že vznikla zaokrouhlením (s přesností na stotisíciny, tj. chybou maximálně $5 \cdot 10^6$) podílu neznámých nejvýše osmibitových čísel. Najděte tento podíl.

Příklad 6. Pomocí Wiegnerova útoku z minulé hodiny zjistěte d, pokud znáte $e = 7915$, $N = 12091$ a víte, že N je součinem dvou podobně velkých prvočísel a $d < 1/3\sqrt[4]{N}$. Postup: Najděte řetězový zlomek pro e/N, jedna z konvergent bude mít tvar k/d, kde platí $ed - k\varphi(N) = 1$. Potom je třeba testovat, které z nalezených d skutečně funguje.