Cvičení 3. 5. 2012

Diofantické rovnice jsou rovnice, jejichž řešení hledáme pouze mezi celými (nebo přirozenými) čísly. Obecně je jejich řešení těžké, ale existují na ně užitečné triky:

1. Počítat modulo nějaké malé číslo.
2. Využít jednoznačného rozkladu na prvočinitele. Například pokud $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou nesoudělá a $ab = u^n$, tak existují r, s, že $a = \pm r^n$, $b = \pm s^n$.
3. Na úlohu se podívat v gaussovském oboru integrity $\mathbb{Z}[i]$.
4. Použití odhadů a nerovností (jedna oblíbená: Pokud $a > b$ jsou celá, tak $a \geq b + 1$).
5. Zkusit se omezit na nesoudělná řešení.
6. Ukázat, že z existence nějakého řešení plyne existence menšího řešení v $\mathbb{N}$ (a tím sporem ukázat neexistenci řešení).

Příklad 1. Najděte všechna celočíselná řešení rovnic:

1. $2x + 3y = 5$
2. $2x^2 = y^2$
3. $x(x + 3) = 4y - 1$
4. $y^3 - x^3 = 91$
5. $x^2 + x = y^3$

Příklad 2. Buďte $a_1, \dots, a_n, d \in \mathbb{Z}$. Dokažte, že rovnice

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d$$

má celočíselné řešení, právě když $NSD(a_1, \dots, a_n)|d$.

Příklad 3 (opakovací)**.** Popište všechny svědky a silné lháře pro 21 a 25.

Příklad 4. Popište všechna (nebo aspoň všechna, která dokážete) celočíselná řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$.

Příklad 5. Buď $x, y \in \mathbb{Z}$ řešení rovnice $x^2 + 1 = y^3$. Dokažte, že:

1. Čísla $x + i$ a $x - i$ jsou v $\mathbb{Z}[i]$ nesoudělná.
2. Výraz $x \pm i$ je v $\mathbb{Z}[i]$ třetí mocnina nějakého prvku.
3. Jediné x splňující, že $x + i$ je třetí mocnina v $\mathbb{Z}[i]$, je $x = 0$.