Druhá sada příkladů pro kombinované studium

Organizační věci

Pokud Vaše přijmení začíná A–Pel: Příklady mi buď noste na papíře na má cvičení, nebo posílejte elektronicky na adresu `alexandr.kazda@seznam.cz`.

Pokud Vaše přijmení začíná Peš–Ž: Příklady posílejte elektronicky na adresu `krcal@kam.mff.cuni.cz` (Marek Krčál).

Přijímám formáty PDF, PS, ODT, DOC a obrázky (neberu DOCX, čistý text ani TEXové zdrojáky). Čas máte do **15. ledna 2010**, ale silně **nedoporučuji** nechat to na poslední chvíli (čím dřív vyřešíte obě sady příkladů, tím dřív dostanete zápočet, který potřebujete ke zkoušce). Příklady, co dostanu, jednou týdně (typicky o víkendu) opravím a rozešlu zpátky. Pokud se vám do týdne neozvu, pravděpodobně jsem Váš mail nedostal.

Potřebujete aspoň **16 bodů z 20** z každé sady příkladů. Prosím, buďte pečliví a vyřešte příklady správně hned napoprvé. Času máte dost a ušetříte práci sobě i mně.

K vyřešení úloh potřebujete něco vědět o kombinatorickém počítání (včetně principu inkluze a exkluze), odhadech funkcí, částečně uspořádaných množinách a grafech (stromech, kostře grafu).

Na zápisu zápočtů do indexu se domluvíme po mailu.

Zadání

1. úloha *(4 body)*

Napište vzorec pro počet permutací na n-prvkové množině, které nemají cyklus délky 2 (tj. neexistují žádná x, y různá, že by bylo $\pi(x) = y$ a $\pi(y) = x$).

2. úloha *(4 body)*

Trpaslíci volí svého nového předáka. Víme, že n trpaslíků je pro Šmudlu a m pro Kejchala. Trpaslíci hlasují veřejně jeden po druhém.

(a) Určete, kolika způsoby se mohl (v závislosti na n, m) vyvíjet počet hlasů pro oba kandidáty během hlasování (tj. počet začíná na $0 : 0$ a končí na $n : m$). (2 body)

(b) Označme $f(k)$ počet způsobů, jak mohlo hlasování probíhat pro $n = k, m = 2k$. Rozhodněte, zda platí $f(k) = O(2^k)$. (2 body)

3. úloha *(4 body)*

Buď $X = P(\{1, 2, 3, 4\}) \setminus \{\emptyset\}$ (tj. množina všech neprázdných podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4\}$). Potom relace $\subseteq$ je neostré částečné uspořádání na X. Vaše úkoly:

(a) Rozhodněte, zda $(X, \subseteq)$ má nejmenší prvek. (1 bod)

(b) Rozhodněte, zda $(X, \subseteq)$ má minimální prvek. (1 bod)

(c) Najděte v $(X, \subseteq)$ nezávislou množinu největší velikosti. (1 bod)

(d) Najděte v $(X, \subseteq)$ řetězec největší délky. (1 bod)

Své odpovědi zdůvodněte!

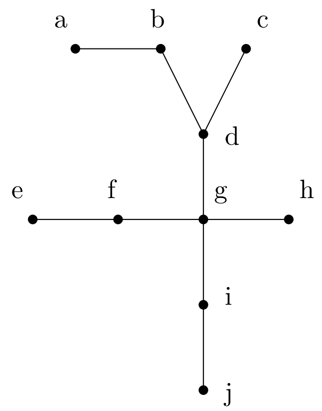
4. úloha *(4 body)*

Buď S graf definovaný takto

$$V(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$E(S) = \{\{1, 4\}, \{2, 8\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}\},$$

dále máme graf T zadaný obrázkem



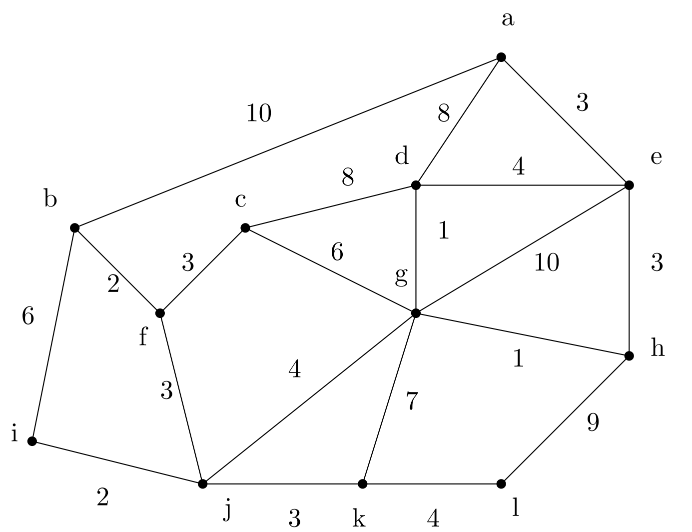
(a) Rozhodněte, zda S je strom. (1 bod)

(b) Rozhodněte, zda T je strom. (1 bod)

(c) Rozhodněte, zda S a T jsou isomorfní (tj. najděte isomorfismus, nebo dokažte, že isomorfní nejsou). (2 body)

5. úloha *(4 body)*

Buď G graf s ohodnocenými hranami jako na obrázku (čísla ohodnocují hrany, písmena jsou názvy vrcholů):



Najděte minimální kostru G pomocí nějakého algoritmu z přednášky (Borůvkova, Jarníkova nebo Kruskalova).

pozn.: Součástí řešení by měl být nějak rozumně zachycený celý průběh algoritmu krok za krokem se zdůvodněním, proč jsme udělali to či ono.