První sada příkladů pro kombinované studium

Organizační věci

Pokud Vaše přijmení začíná A-Pel: Příklady mi buď noste na papíře na má cvičení, nebo posílejte elektronicky na adresu `alexandr.kazda@seznam.cz`.

Pokud Vaše přijmení začíná Peš-Ž: Příklady posílejte elektronicky na adresu `krcal@kam.mff.cuni.cz` (Marek Krčál).

Přijímám formáty PDF, PS, ODT, DOC a obrázky (neberu DOCX, čistý text ani TEXové zdrojáky). Čas máte do **15. ledna 2010**, ale silně **nedoporučuji** nechat to na poslední chvíli (čím dřív vyřešíte obě sady příkladů, tím dřív dostanete zápočet, který potřebujete ke zkoušce). Příklady, co dostanu, jednou týdně (typicky o víkendu) opravím a rozešlu zpátky. Pokud se vám do týdne neozvu, pravděpodobně jsem Váš mail nedostal.

Potřebujete aspoň **16 bodů z 20** z obou sad příkladů (druhou vyvěsím koncem roku). Prosím, buďte pečliví a vyřešte příklady správně hned napoprvé. Času máte dost a ušetříte práci sobě i mně.

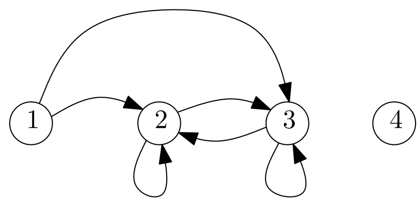
Pokud vám není jasná nějaká látka z přednášky (či z *Kapitol z diskrétní matematiky*), napište mi a domluvíme se na konzultacích. K úspěšnému vyřešení domacích úkolů potřebujete něco vědět o logice, množinách, důkazech (speciálně důkazu matematickou indukcí), relacích, zobrazeních, kombinatorickém počítání a principu inkluze a exkluze.

Zadání

1. úloha *(4 body)*
Nechť pro množiny A, B, C platí $A \cap B, B \cap C, A \cap C \neq \emptyset$. Rozhodněte (tedy dokažte, nebo najděte protipříklad), zda potom musí nutně platit $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

2. úloha *(4 body)*
Dokažte matematickou indukcí, že součet vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku je $\pi \cdot (n-2)$ (resp. $(n-2) \cdot 180°$) pro $n \geq 3$. Můžete bez důkazu použít, že součet úhlů v trojúhelníku je $\pi = 180°$.

3. úloha *(4 body)*
Nechť relace R na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ je dána následujícím grafem:



Rozhodněte, zda R je

(a) reflexivní,

(b) tranzitivní,

(c) symetrická.

4. úloha *(4 body)*
Buďte X, Y konečné množiny, $|X| = n, |Y| = m$. Určete, pro která m, n existují zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ taková, že

$$\forall x \in X,\ g(f(x)) = x$$
$$\forall y \in Y,\ f(g(y)) = y.$$

Svou odpověď zdůvodněte.

5. úloha *(4 body)*
Určete pomocí principu inkluze a exkluze, kolika způsoby můžeme za sebe napsat 26 písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z (každé právě jednou) tak, aby ve výsledné sekvenci nešlo vyškrtáním některých písmen najít ani jedno ze slov IT, ZIMA a MATFYZ. Například abecedně za sebou napsaná písmena neobsahují slova ZIMA ani MATFYZ, ale pokud vyškrtneme vše krom I a T, dostaneme zakázené slovo IT. Kombinační čísla a faktoriály ve výsledku nemusíte vyčíslovat.