Středa, skupina A

Jméno:

1. úloha *(4 body)*

Máme n kostiček (nerozlišitelných) označených písmenem A a n kostiček (taktéž nerozlišitelných) označených písmenem B.

(a) Spočtete, kolika způsoby můžeme dát všechny kostičky do řady za sebe tak, aby vzniklé slovo nezačínalo ani nekončilo písmenem B (2 body)

(b) Označme $f(n)$ počet možností z části (a). Rozhodněte, zda pro každé n přirozené platí $f(n) \leq 2^n$. (2 body)

2. úloha *(4 body)*

Určete (pomocí principu inkluze a exkluze), kolik čísel zůstane v množině $\{1, 2, \dots, 1200\}$ po vyškrtání všech násobků čísel 3, 5, 7 a 11.

3. úloha *(4 body)*

Buď $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ uspořádaná pomocí dělitelnosti, tj. $m \preceq n$, právě když je číslo n dělitelné číslem m.

(a) Nakreslete Hasseův diagram pro tuto částečně uspořádanou množinu.

(b) Najděte všechny minimální prvky.

(c) Existuje v $(X, \preceq)$ největší prvek?

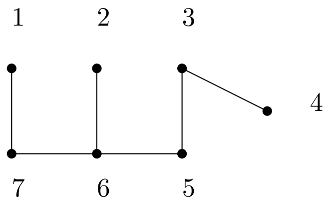
(d) Kolik činí délka nejdelšího řetězce v $(X, \preceq)$ (připomínám, že délka řetězce = počet prvků v řetězci)?

4. úloha *(4 body)*

Buď S graf definovaný takto $V(S) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,

$$E(S) = \{\{a, e\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, e\}, \{c, g\}\}.$$

Graf T máme zadaný obrázkem:



(a) Rozhodněte, zda S je strom. (1 bod)

(b) Rozhodněte, zda T je strom. (1 bod)

(c) Rozhodněte, zda S a T jsou isomorfní (tj. najděte isomorfismus, nebo dokažte, že isomorfní nejsou). (2 body)

5. úloha *(4 body)*

Přehled za celý semestr. Stačí zakroužkovat správnou možnost. Nemusíte nic dokazovat ani zdůvodňovat. Vždy je právě jedna správná odpověď (a každá otázka je za bod).

(i) Buďte A, B, C množiny. Rozdodněte, která z následujících formulí **neplatí** pro všechna A, B, C.

(a) $A \subset B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

(b) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \setminus B$

(c) $A \cup B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \cup C \neq \emptyset$

(d) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

(ii) Nechť R je relace na množině $\{1, 2, 3\}$ definovaná jako

$$R = \{(1,1), (1,3), (3,1), (2,2), (2,1), (3,3)\}.$$

Potom:

(a) R je reflexivní a symetrická

(b) R je reflexivní, není symetrická

(c) R není reflexivní, je symetrická

(d) R není ani reflexivní, ani symetrická

(iii) Buďte $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ zobrazení taková, že $g(f(x)) = x$ pro všechna $x \in X$. Potom můžeme s jistotou usoudit, že:

(a) f je prosté

(b) g je prosté

(c) $|X| = |Y|$

(d) $|X| \geq |Y|$

(iv) Koeficient u členu x^6y^7 po roznásobení výrazu $(x + y)^{13}$ je

(a) $\frac{13!}{6!}$

(b) $\frac{6!}{13!}$

(c) $\binom{6}{13}$

(d) $\binom{13}{6}$

Středa, skupina B

Jméno:

1. úloha *(4 body)*

Máme n kostiček (nerozlišitelných) označených písmenem A a n kostiček (taktéž nerozlišitelných) označených písmenem B.

(a) Spočtete, kolika způsoby můžeme dát všechny kostičky do řady za sebe tak, aby vzniklé slovo začínalo nebo končilo písmenem B (2 body)

(b) Označme $f(n)$ počet možností z části (a). Rozhodněte, zda pro každé n přirozené platí $f(n) \leq 2^n$. (2 body)

2. úloha *(4 body)*

Určete (pomocí principu inkluze a exkluze), kolik čísel zůstane v množině $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků čísel 2, 5, 11 a 13.

3. úloha *(4 body)*

Buď $X = \{(a, b) : a, b \in \{1, 2, 3\}\}$ uspořádaná podle velikosti „po složkách", tj $(a, b) \preceq (c, d)$, právě když $a \leq c$ a $b \leq d$. Pak $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina.

(a) Nakreslete Hasseův diagram pro tuto částečně uspořádanou množinu.

(b) Najděte všechny minimální prvky.

(c) Existuje v $(X, \preceq)$ největší prvek?

(d) Kolik činí délka nejdelšího řetězce v $(X, \preceq)$ (připomínám, že délka řetězce = počet prvků v řetězci)?

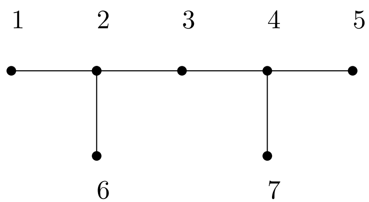
4. úloha *(4 body)*

Buď S graf definovaný takto

$$V(S) = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

$$E(S) = \{\{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, e\}, \{c, g\}\}.$$

Graf T máme zadaný obrázkem:



(a) Rozhodněte, zda S je strom. (1 bod)

(b) Rozhodněte, zda T je strom. (1 bod)

(c) Rozhodněte, zda S a T jsou isomorfní (tj. najděte isomorfismus, nebo dokažte, že isomorfní nejsou). (2 body)

5. úloha *(4 body)*

Přehled za celý semestr. Stačí zakroužkovat správnou možnost. Nemusíte nic dokazovat ani zdůvodňovat. Vždy je právě jedna správná odpověď (a každá otázka je za bod).

(i) Buďte A, B, C množiny. Rozhodněte, která z následujících formulí **neplatí** pro všechna A, B, C.

(a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \setminus B$

(b) $A \cup B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

(c) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

(d) $A \cup B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \cup C \neq \emptyset$

(ii) Nechť R je relace na množině $\{a, b, c, d\}$ definovaná jako

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}.$$

Potom:

(a) R je reflexivní a symetrická

(b) R je reflexivní, není symetrická

(c) R není reflexivní, je symetrická

(d) R není ani reflexivní, ani symetrická

(iii) Buďte $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ zobrazení taková, že $g(f(x)) = x$ pro všechna $x \in X$. Potom můžeme s jistotou usoudit, že:

(a) $|X| = |Y|$

(b) $|X| \leq |Y|$

(c) f je na

(d) g je prosté

(iv) Koeficient u členu $a^6 b^{19}$ po roznásobení výrazu $(a + b)^{25}$ je

(a) $\binom{6}{25}$

(b) $\binom{25}{6}$

(c) $\frac{25!}{6!}$

(d) $\frac{6!}{25!}$