1. úloha (1 bod)

(Úloha z minula.) Najděte příklad dvou ekvivalencí R, S takových, že $R \cup S$ není ekvivalence.

Následující úlohy vyžadují znalost teorie z přednášky, která se konala 22. října. Zadání by sice měla obsahovat všechny důležité informace, ale přesto silně doporučuji se před řešením podívat na zápisky z přednášky.

2. úloha (3 body)

Na přednášce jste probírali zavedení nezáporných celých čísel (tj. čísel 0, 1, 2, atd.) v teorii množin pomocí pravidel:

$$0 = \emptyset$$

$$n + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

V maximálně expandovaném zápisu bychom tudíž psali například

$$1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

Určete v závislosti na n, kolik se v takovém zápisu čísla n vyskytuje

(a) závorek (levých+pravých) (1 bod)

(b) symbolů $\emptyset$ (1 bod)

(c) čárek (tj. „,“). (1 bod)

3. úloha (1 bod)

Podrobně dokažte, že pokud jsou A, B konečné množiny takové, že $|A| = n$, $|B| = m$ a $A \cap B = \emptyset$, tak $|A \cup B| = m + n$.

Přitom součet na $\mathbb{N}_0$ formálně zavedeme takto:

$$n + 0 = n$$

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1.$$

(tj. $n + 3 = ((n + 1) + 1) + 1$) a píšeme $|Y| = n$, pokud existuje bijekce $f : Y \to n$ (Definice n jako množiny byla na přednášce; podstatné je, že $n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$, tedy množina n má celkem n prvků.)

pozn.: Na první pohled je jasné, že tvrzení platí, jde o to, správně ho zdůvodnit pomocí toho, co známe.

Hint: Jděte pro každé A indukcí podle $|B|$.