Řešení cvičení 24. 11. 2011

Pokud vám vyjdou čísla o trochu jiná, jeden z nás udělal chybu...

Řešení 1. Spočteme počet pevných bodů v grupě D_6 a vydělíme $|D_6| = 12$:

$$\frac{1}{12}\left(1 \cdot 20 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4\right) = \frac{36}{12} = 3.$$

Řešení 2. Dle poznatků z lineární algebry je pro každý vektor $v \neq 0$ množina $\{Av : A \in GL(3, \mathbb{R})\}$ rovna $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Proto máme dvě orbity: Množinu všech nenulových vektorů a jednoprvkovou množinu obsahující nulový vektor.

Pro A regulární matici je v její pevný bod, právě když $Av = v$, což je ekvivalentní $(A - E)v = 0$, čili jsou to právě vektor 0 a všechny vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1.

Řešení 3. Volíme grupu rotací čtverce s působením rotací na množinu X všech obarvených čterců $n \times n$. Pevné body nám vycházejí jinak pro n sudé a jinak pro n liché (nakreslete si obrázek!).

Pro n sudé:

$$\begin{array}{rl} id & 2^{n^2} \\ r_{90}, r_{270} & 2^{n^2/4} \\ r_{180} & 2^{n^2/2} \end{array}$$

Počet orbit:

$$\frac{1}{4}(2^{n^2} + 2 \cdot 2^{n^2/4} + 2n^2/2),$$

Pro n liché:

$$\begin{array}{rl} id & 2^{n^2} \\ r_{90}, r_{270} & 2^{(n^2-1)/4+1} \\ r_{180} & 2^{(n^2+1)/2} \end{array}$$

Počet orbit:

$$\frac{1}{4}(2^{n^2} + 2 \cdot 2^{(n^2-1)/4} + 2^{(n^2+1)/2}),$$

Řešení 4. Podobné příkladu výše, jenom máme grupu D_4 (přibyla nám zrcadlení). Krom rotací z předchozího příkladu máme zrcadlení s_1, s_2 (osa spojuje středy stran) a u_1, u_2 (osa je úhlopříčka). Pro n sudé máme počet pevných bodů:

$$\begin{array}{ll} s_1, s_2 & 2^{n^2/2} \\ r_1, r_2 & 2^{n(n+1)/2}, \end{array}$$

takže (po připočtení rotací) dostaneme vzoreček:

$$\frac{1}{8}(2^{n^2} + 2 \cdot 2^{n^2/4} + 3 \cdot 2^{n^2/2} + 2 \cdot 2^{n(n+1)/2})$$

Pro n liché máme počet pevných bodů:

$$\begin{array}{ll} s_1, s_2 & 2^{n(n+1)/2} \\ r_1, r_2 & 2^{n(n+1)/2}, \end{array}$$

takže (po připočtení rotací) dostaneme vzoreček:

$$\frac{1}{8}(2^{n^2} + 2 \cdot 2^{n^2/4} + 2^{n^2/2} + 4 \cdot 2^{n(n+1)/2}).$$

Řešení 5. Grupa G budou permutace na $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, množina X budou grafy s rozlišitelnými vrcholy 1,2,3,4,5 (každá z 10 možných hran v grafu buď je, nebo není). Počet pevných bodů závisí na druhu permutace (kreslete si obrázky):

Identita (je jen 1): 2^{10}
Transpozice (těch je v S_5 celkem 10): $2^{6+1} = 2^7$
Trojcyklus (těch je 20): $2^{3+1} = 2^4$
Čtyřcyklus (těch je 30): $2^{1+1+1} = 2^3$
Pěticyklus (těch je 24): $2^{1+1} = 2^2$
Dvě nezávislé transpozice (těch je 15): $2^{4+2} = 2^6$
Transpozice a trojcyklus (těch je 20): $2^{1+1+1} = 2^3$
Burnside pak praví, že neisomorfních grafů je:

$$\frac{1}{120}(1 \cdot 2^{10} + 10 \cdot 2^7 + 20 \cdot 2^4 + 30 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2^6 + 20 \cdot 2^3) = 34.$$

Řešení 6. Kulatý stůl si obarvíme podle klubů šesti barvami, za G volíme grupu rotací. Tvrdíme, že žádná rotace krom identity pak nemá pevný bod.

Nechť posunutí o $k \neq 0$ míst po směru hodinových ručiček zachovává pozice poslanců ODS. Protože 53 je prvočíslo, musí se tyto pozice točit v jednom velkém cyklu, tedy musí nutně platit $200|53k$ (nakreslete si obrázek), což ale lze jenom tak, že $k = 0$.

Proto je rozesazení:

$$\frac{1}{200}\frac{200!}{54!53!41!26!21!5!}.$$

Řešení 7. Počítáme dvěma způsoby počet dvojic $\{(g, x) : \phi(g)(x) = x\}$, viz skripta.