# Řešení úloh 8. 12. 2011

**Příklad 1.** Ověřte, že následující struktury jsou moduly (po vhodném doplnění zobrazení „$\cdot r$“ pro $r \in R$):

1. Vektorový prostor $V$ nad tělesem $K$ je pravý $K$-modul,
2. každý okruh $R$ je sám nad sebou pravý $R$-modul,
3. pokud je $I$ pravý ideál $R$, tak je $I$ pravý $R$-modul,
4. prostor $\mathbb{R}^n$ je pravý $M_n(\mathbb{R})$-modul,
5. každá komutativní grupa je pravý $\mathbb{Z}$-modul.

*Řešení:* Vynechám ověření axiomů modulu, popíšu jenom působení (tj. operace $\cdot r$; je možné, že někdy lze operaci $\cdot r$ definovat i jinak, ale tyhle jsou nejvíc „na ráně“):

1. Pro $v \in V$ bude $v \cdot r$ je běžně známé násobení vektoru skalárem (tím je vektorový prostor vybaven už z definice)
2. Pro $s \in R$ vyhodnotíme $s \cdot r$ jako násobení v $R$
3. Totéž jako výše (je potřeba ale ověřit, že $I$ je na operaci $\cdot r$ uzavřený, což je právě vlastnost pravého ideálu)
4. Abychom dostali pravý modul, musí platit $(v \cdot A) \cdot B = v \cdot (AB)$, tedy potřebujeme chápat $v$ jako řádkový vektor a $\cdot$ jako násobení vektoru maticí (alternativně může $v$ být sloupcový a položíme $v \cdot A = A^T v$, kde druhé násobení je běžné násobení vektoru maticí).
5. Pro $n \in \mathbb{Z}$ položíme $g \cdot n$ rovno součtu $n$ kusů $g$ (pokud $n < 0$, tak $-n$ kusů $-g$).

**Příklad 2.** Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podmoduly $\mathbb{Z}^2$ uvažovaného jako $\mathbb{Z}$-modul. Pokud ano, popište vzniklý faktormodul:

1. $\{(m, n) : m = n\}$
2. $\{(m, n) : mn = 0\}$

3. $\{(3m, 4n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$

*Řešení:*

1. Tvoří podmodul, neboť obsahuje nulu $(0, 0)$ a je uzavřená na sčítání, odčítání i násobení celými čísly. Faktormodul je isomorfní $\mathbb{Z}$, stačí poslat $(m, n) \mapsto m - n$ a použít první větu o isomorfismu pro moduly.

2. Značme tuto množinu $N$. Pak $N$ netvoří podmodul, protože například $(0, 1), (1, 0) \in N$, ale $(1, 1) \notin N$.

3. Tvoří podmodul, neboť opět obsahuje nulu, je uzavřená na sčítání, odčítání i násobení celými čísly. Faktorokruh bude isomorfní $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ (volme zobrazení $(k, l) \mapsto (k \pmod 3, l \pmod 4))$.

**Příklad 3.** Najděte (co nejmenší) množinu generátorů pro $\mathbb{C}$ uvažované jako $\mathbb{R}$-modul.

*Řešení:* Protože $\mathbb{R}$-moduly a vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ jsou totéž, víme, že nám stačí najít nějakou bázi $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, čili například $\{1, i\}$.

**Příklad 4.** Dokažte, že množina všech polynomů nad $\mathbb{R}$ uvažovaná jako $\mathbb{R}$-modul není konečně generovaná.

*Řešení:* Nechť existuje konečná (neprázdná) množina $B$ polynomů, která generuje $\mathbb{R}[x]$ jako vektorový prostor. Buď $n$ maximální stupeň polynomu v $B$. Potom pomocí lineárních kombinací prvků z $B$ nejsme schopni dostat žádný polynom stupně $n + 1$, spor.