Cvičení 22. 12. 2011

Příklad 1. Které z následujícíh okruhů jsou isomorfní?

$$\mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}[x]/12\,\mathbb{Z}[x]$$

Řešení 1. První dva okruhy jsou isomorfní pomocí zobrazení $a + 12\mathbb{Z} \mapsto a \pmod{12}$.

Třetí okruh je isomorfní okruhu $\mathbb{Z}_{12}[x]$, který má nekonečně mnoho prvků, a není tedy isomorfní prvním dvěma okruhům.

Příklad 2. Dokažte, že:

1. $\mathbb{R}[x]/(x+1)\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{C}$
3. $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{R}^2$ (Násobení v okruhu $\mathbb{R}^2$ funguje po složkách.)

Řešení 2. Klíčové je uvědomit si, že polynomy můžeme dělit se zbytkem.

1. Prvky okruhu $\mathbb{R}[x]/(x+1)\mathbb{R}[x]$ můžeme díky dělení se zbytkem psát ve tvaru $a + (x+1)\mathbb{R}[x]$, přičemž $a \in \mathbb{R}$ je polynom tvořený pouze absolutním členem. Nyní se snadno ověří, že zobrazení $a + (x+1)\mathbb{R}[x] \mapsto a$ je isomorfismus.

2. Podobně jako výše lze prvky $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)\mathbb{R}[x]$ psát ve tvaru $ax + b + (x^2+1)\mathbb{R}[x]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Isomorfismus dostaneme volbou $ax + b + (x^2+1)\mathbb{R}[x] \mapsto ai + b$ (Existuje ale ještě jeden možný isomorfismus. Najdete ho?).

3. Prvky faktorokruhu vypadají podobně jako v bodě 2, totiž jako $ax + b + (x^2-1)\mathbb{R}[x]$. Rozdíl je v tom, že v $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)\mathbb{R}[x]$ funguje jinak násobení; máme

$$\begin{aligned}(ax + b + (x^2-1)\mathbb{R}[x])&(cx + d + (x^2-1)\mathbb{R}[x]) = \\ &= acx^2 + (ad+bc)x + bd + (x^2-1)\mathbb{R}[x] = \\ &= (ad+bc)x + bd + ac + (x^2-1)\mathbb{R}[x].\end{aligned}$$

   Dostatečně dlouhým pozorováním tohoto vzorečku (například srovnáním množiny prvků r, které splňují $r^2 = r$) zjistíme, že potřebujeme volit isomorfismus $ax + b + \mathbb{R}[x](x^2-1) \mapsto (a+b, -a+b)$.

Rychlejší a elegantnější je v tomto případě použít 1. větu o isomorfismu, kde volíme zobrazení $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$, které polynomu $p(x)$ přiřadí dvojici $(p(1), p(-1))$. Toto zobrazení má totiž jádro přesně $(x^2 - 1)\mathbb{R}[x]$.

Pro pokročilejší: Zkuste si rozmyslet, jak souvisí rozložení kořenů polynomu, podle kterého faktorizujeme, se strukturou výsledného faktorokruhu.

Příklad 3. Rozhodněte, zda okruh $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x]$ je těleso.

Řešení 3. Pomocí dělení se zbytkem zjistíme, že zadaný faktorokruh má pouze čtyři prvky:

$$0 + (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x], 1 + (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x], x + (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x], x + 1 + (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x]$$

Nyní $(x + 1 + (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x])^2 = x^2 + 1 + (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x] = 0 + (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x]$, čili zadaný okruh není ani obor integrity, natož těleso.

Příklad 4. Dokažte, že matice 2×2, jejichž prvky jsou sudá čísla, tvoří ideál v okruhu $M_2(\mathbb{Z})$. Dokažte, že příslušný faktorokruh je isomorfní $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Řešení 4. Definujme zobrazení $f : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z}_2)$ tak, že matici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ přiřadíme matici $\begin{pmatrix} a \pmod 2 & b \pmod 2 \\ c \pmod 2 & d \pmod 2 \end{pmatrix}$. Snadno se ověří, že f je surjektivní okruhový homomorfismus (nejvíc práce dá násobení matic) a $\operatorname{Ker} f$ jsou právě všechny matice se sudými prvky. První věta o isomorfismus pak dává zbytek.

Příklad 5. Buď R obor integrity. Napište inverzní prvek (na násobení) k prvku $\frac{a}{b} \in Q_{cl}(R)$, $a \neq 0$.

Řešení 5. Máme $\frac{a}{b}\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1} = 1$, kde jsme použili rovnost $ab - ba = 0$ (součástí definice oboru integrity je komutativita).

Příklad 6. Buď R obor integrity. Najděte prostý homomorfismus (vnoření) $R \to Q_{cl}(R)$.

Řešení 6. Funguje $r \mapsto \frac{r}{1}$.

Příklad 7. Popište $Q_{cl}(\mathbb{Z}[x])$.

Řešení 7. Jsou to racionální lomené funkce; dvě takové funkce považujeme (na rozdíl od analýzy) za sobě rovné, pokud se rovnají na celé reálné ose až na konečně mnoho bodů (abychom mohli psát třeba $\frac{x}{x} = \frac{1}{1}$).

Příklad 8. Buď K komutativní těleso. Popište $Q_{cl}(K)$.

Řešení 8. Vyjde $Q_{cl}(K) \simeq K$, protože pokud je $\frac{a}{b}$ prvek podílového tělesa, tak $\frac{a}{b} = \frac{ab^{-1}}{1}$, takže vnoření z příkladu 6 je bijekce.