Cvičení 1. 12. 2011

Z přednášky víme (Frobenius-Stickelberger), že každá konečná komutativní grupa je isomorfní součinu grup $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$, kde p_i jsou prvočísla.

Jak takový součin najít? Pomocí řádů prvků G. Nejprve identifikujeme p-primární komponenty, tj. podgrupy G tvořené prvky řádu mocniny p. Pišme

$$G_p = \{g \in G \colon \exists l, |g| = p^l\}.$$

Nutně bude G_p isomorfní součinu $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{m_i}}$ pro nějaká $m_1, \ldots, m_k$, která potřebujeme najít. To se dá provést pomocí faktorizace jako ve skriptech, nebo na koleně pomocí zkoumání prvků G_p největšího řádu. Například pokud v G_2 nemáme prvek řádu většího než 2, tak G_2 bude součin grup $\mathbb{Z}_2$ (tj. nenajdeme tam třeba $\mathbb{Z}_4$).

Užitečné je, že pokud je G cyklická, tak je nutně cyklická i každá p-primární komponenta, tedy $G_p = \mathbb{Z}_{p^m}$.

Pro n přirozené číslo nadefinujeme grupu

$$\mathbb{Z}_m = (\{k \in \{1, \ldots, m\} \colon k \text{ a } m \text{ jsou nesoudělná}\}, \cdot_m),$$

kde $\cdot_m$ je násobení modulo m.

Příklad 1. Které z následujících grup jsou cyklické? $\mathbb{Z}_{365}$, $\mathbb{Z}_8^\star$ a $\mathbb{Z}_{25}^\star$.

Příklad 2. Dokažte, že grupa $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ je cyklická právě když jsou m, n nesoudělná.

Příklad 3. Napište následující grupy ve tvaru součinu grup $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$: $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{30}$ a $\mathbb{Z}_{144}$.

Příklad 4. Napište následující grupy ve tvaru součinu grup $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$: $\mathbb{Z}_7^\star$, $\mathbb{Z}_{17}^\star$, $\mathbb{Z}_{25}^\star$ a podgrupa diagonálních matic v $GL(3, \mathbb{Z}_3)$.

Příklad 5. Najděte $n \neq m$ taková, že $\mathbb{Z}_n^\star \simeq \mathbb{Z}_m^\star$.

Příklad 6. Dokažte, že $\mathbb{Z}_m^\star$ je grupa pro každé $m \in \mathbb{N}$.