Cvičení 24. 11. 2011

Burnsideovo lemma říká, že pokud G je **konečná** grupa působící na **konečnou** množinu X, tak počet orbit tohoto působení je roven

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{x\in X : g(x)=x\}|.$$

Můžeme si tak celkem snadno spočítat počet konfigurací různých „až na symetrie“ (působení grupy G bude vyjadřovat symetrie).

Příklad 1 *Kolika způsoby lze sestavit z 3 červených a 3 bílých korálků náhrdelník, pokud provázek můžeme otáčet a převracet?*

Příklad 2 *Grupa $GL(3,\mathbb{R})$ působí na prostor $\mathbb{R}^3$ běžným násobením vektoru maticí. Určete počet orbit tohoto působení. Co jsou pevné body působení pro matici A?*

Příklad 3 *Kolika způsoby lze obarvit černou a bílou barvou políčka mřížky $n\times n$, pokud mřížku můžeme otáčet?*

Příklad 4 *Totéž jako výše, ale mřížku můžeme i obracet (je průhledná).*

Příklad 5 *Kolik existuje neisomorfních grafů na 5 vrcholech?*

Příklad 6 *Okolo kulatého stolu sedí čeští poslanci (rozdělení dle klubů: ČSSD 54, ODS 53, TOP09 41, KSČM 26, VV 21, nezařazení 5). Kolika různými způsoby lze poslance rozesadit kolem kulatého stolu pokud nezáleží na natočení stolu a zajímá nás pouze klubová příslušnost?*

Příklad 7 *Dokažte Burnsideovo lemma. Rada: Je to počítání dvěma způsoby.*