Cvičení 12. 1. 2012

Teorie kategorií je obecný jazyk matematiky (podobně jako teorie množin). Základní pojmy jsou objekty (puntíky) a morfismy (šipky). O morfismech víme, že je lze skládat, ale *morfismy nemusí být zobrazení*. Morfismy mohou být prostě abstraktní šipky. Definice kategorie viz skripta Definice 2.53.

Pojmy limity a kolimity v kategorii jsou (ač to tak na první pohled nevypadá) přirozené způsoby, jak z nějaké konfigurace objektů a morfismů dostat nový objekt, propojený pomocí dobrých morfismů s objekty původními. Přesná definice limity a kolimity viz skripta Definice 2.60.

Příklad 1. Ověřte, že axiomy teorie kategorií splňuje:

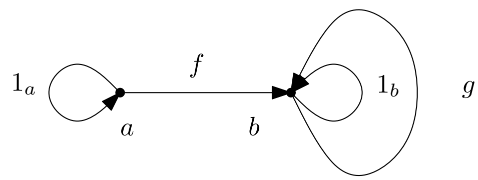
1. Kategorie grup s objekty grupami a morfismy grupovými homomorfismy.
2. Kategorie okruhů s objekty okruhy a morfismy okruhovými homomorfismy.
3. Kategorie množin s objekty množinami a morfismy zobrazeními.
4. Kategorie D s objekty přirozenými čísly a množinou morfismů z n do m jednoprvkovou pokud $n|m$ a prázdnou jinak.

Příklad 2. Nechť trojúhelníky v následujícím diagramu komutují:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "h"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "j"'] & d \end{tikzcd}$$

Dokažte, že pak komutuje i čtverec.

Příklad 3. Napište tabulku skládání morfismů, aby věc na obrázku byla kategorie:



Příklad 4. Buď K kategorie, A, B dva její objekty, $\to$ morfismus z A do B. Jak potom vypadá limita diagramu $A \to B$?

Příklad 5. V kategorii D z prvního příkladu popište součiny a kosoučiny.

Příklad 6. V kategorii modulů nad $\mathbb{Z}$ (tj. komutativních grup) najděte limitu diagramu:

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{f_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{f_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{f_3} \mathbb{Z} \qquad \cdots$$

Zde morfismy f_i jsou zobrazení $f_i(n) = 2n$.

Jak na to: Nejprve zapomeňte na morfismy f_i a vyrobte součin $\mathbb{Z}$, potom najděte co největší podmodul tohoto součinu, aby vše komutovalo.