Cvičení 5. 1. 2012

Pojem modulu nad okruhem zobecňuje pojem vektorového prostoru nad tělesem. Pokud R je okruh, tak $M = (M, +, -, 0, \{\cdot r : r \in R\})$ je pravý R-modul, pokud platí:

1. $(M, +, -, 0)$ je komutativní grupa
2. Pro každé $r \in R$ máme definovanou operaci $\cdot r : M \to M$
3. $(m + m')r = mr + m'r$ pro všechna $m, m' \in M, r \in R$
4. $m(r + s) = mr + ms$ pro všechna $m \in M, r, s \in R$
5. $m(rs) = (mr)s$ pro všechna $m \in M, r, s \in R$
6. $m1_R = m$ pro všechna $m \in M$.

Pravý ideál $I \subset R$ je podobný oboustrannému ideálu, jen poslední podmínku nahradíme slabší verzí $\forall i \in I, r \in R$, $ir \in I$.

Příklad 1. Ověřte, že následující struktury jsou moduly (po vhodném doplnění zobrazení „$\cdot r$“ pro $r \in R$):

1. Vektorový prostor V nad tělesem K je pravý K-modul,
2. každý okruh R je sám nad sebou pravý R-modul,
3. pokud je I pravý ideál R, tak je I pravý R-modul,
4. prostor $\mathbb{R}^n$ je pravý $M_n(\mathbb{R})$-modul,
5. každá komutativní grupa je pravý $\mathbb{Z}$-modul.

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující množiny tvoří podmoduly $\mathbb{Z}^2$ uvažovaného jako $\mathbb{Z}$-modul. Pokud ano, popište vzniklý faktormodul:

1. $\{(m, n) : m = n\}$
2. $\{(m, n) : mn = 0\}$
3. $\{(3m, 4n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$

Příklad 3. Najděte (co nejmenší) množinu generátorů pro $\mathbb{C}$ uvažované jako $\mathbb{R}$-modul.

Příklad 4. Dokažte, že množina všech polynomů nad $\mathbb{R}$ uvažovaná jako $\mathbb{R}$-modul není konečně generovaná.