Cvičení 24. 11. 2011

Okruh $\mathcal{R} = (R, +, -, 0, \cdot, 1)$ je množina s operacemi taková, že:

1. $0 \neq 1$
2. $(R, +, -, 0)$ je komutativní grupa
3. $(R, \cdot, 1)$ je monoid
4. Platí distributivní zákony

$$(a+b)c = ac + bc$$
$$a(b+c) = ab + ac$$

Operace $-$ a konstanty 0 a 1 se v zápisu okruhu často vynechávají…

Příklad 1 *Rozhodněte, zda následující struktury jsou okruhy:*

1. $(\mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1)$
2. $(\mathbb{Z}_n, +, -, 0, \cdot, 1)$ *(s operacemi modulo n)*
3. *Regulární matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi maticového sčítání, odčítání, násobení, nulovou maticí a jednotkovou maticí.*
4. *Matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi maticového sčítání, odčítání, násobení, nulovou maticí a jednotkovou maticí.*
5. $(\{a + i\sqrt{5}b : a, b \in \mathbb{Z}\}, +, -, 0, \cdot, 1)$
6. $\left(\mathbb{R}^3, +, -, 0, \times, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, *kde $\times$ je vektorové násobení vektorů*

Příklad 2 *Buď R okruh. Dokažte, že $0a = a0 = 0$, $(-1)a = -a$ a $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.*

Příklad 3 *Najděte okruh, kde existují prvky a, b takové, že $a \neq 0, b \neq 0$, ale $ab = 0$.*

Příklad 4 *Buď R okruh, kde $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ pro všechny $a, b \in R$. Dokažte, že rovnice $x^2 = x$ má v R právě dvě řešení.*