Náhradní písemka

Příklad 1. Najděte podgrupu $GL(3, \mathbb{R})$ isomorfní:

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}_2$
3. S_3

Řešení: 1) Funguje tu například podgrupa $G_1 = \{\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z}\}$ generovaná maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (a mnoha jinými maticemi).

2) Stačí najít matici A, že $A^2 = E$, hledaná podgrupa pak bude $\{E, A\}$. Vhodná A je například $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Lze se inspirovat domácím úkolem a použít matice permutující aritmetickou bázi:

$$E, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Příklad 2. Buď $H \subset G$, H neprázdná, konečná a uzavřená na $\circ$. Dokažte, že potom:

1. $\forall h \in H, \exists n, h^n = e_G$,
2. $H \leq G$.

Řešení: 1) Uvažme posloupnost $1, h, h^2, h^3, \ldots$. Ta je podmnožinou konečné množiny H a musí se tedy někdy zacyklit. Nechť $i > j$ jsou takové, že $h^i = h^j$. Potom nutně $h^{i-j} = e_G$.

2) Stačí ukázat, že H obsahuje s každým prvkem h i h^{-1} (z toho totiž už snadno plyne, že H obsahuje i $hh^{-1} = e_G$). K tomu ale stačí uvážit n z 1) a psát $e_G = h^n = h^{n-1}h$. Tedy H obsahuje $h^{n-1} = h^{-1}$, čímž je důkaz hotov.

Příklad 3. Rozhodněte, zda platí:

1. Pokud je $f : G \to H$ homomorfismus grup a $\forall g \in G, f(g) = e_H \Rightarrow g = e_G$, tak f je prosté.

2. Existuje $n > 1$, že existuje až na isomorfismus jediná grupa řádu n.

Řešení: 1) Uvedená podmínka říká přesně, že $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$, takže f musí být prosté.

Jinak: Pokud je $f(g) = f(g')$, tak $f(g^{-1}g') = e_H$, takže $g^{-1}g' = e_G$, takže $g = g'$.

2) Stačí volit $n = 2$ (tvrzení ve skutečnosti platí pro libovolné prvočíslo). Všechny grupy řádu 2 musí být isomorfní $\mathbb{Z}_2$ (zkuste si doplnit tabulku ala sudoku).