Cvičení ze svazů

Připomenutí z prváku: Částečně uspořádané množiny (máme množinu plus uspořádání, které nemusí být lineární). Hasseovy diagramy.

Svazové uspořádání $(X, \leq)$: Máme ČUM, kde navíc pro každou dvojici a, b existuje supremum i infimum.

Jiný pohled na věc (na přednášce se podrobně ukazuje, že je ekvivalentní): Supremum a infimum jsou binární operace, budeme je značit $a \wedge b = \inf(a, b)$ a $a \vee b = \sup(a, b)$, a všimneme si, že $\wedge, \vee$ jsou komutativní a asociativní, dále jsou idempotentní $a \wedge a = a = a \vee a$ a konečně funguje *absorbce*:

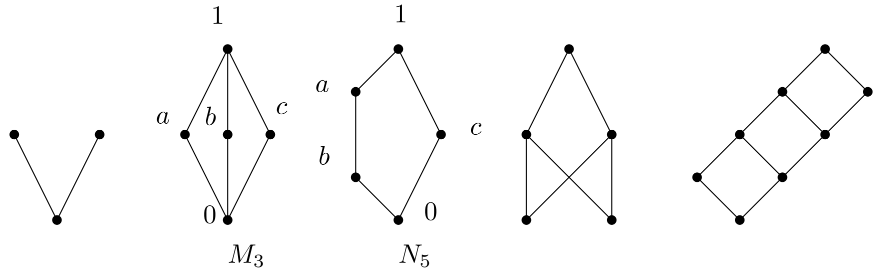
$$a \wedge (a \vee c) = a = a \vee (a \wedge c).$$

To jsou přesně axiomy pro to, aby $(X, \wedge, \vee)$ byl svaz. Svazové uspořádání potom definujeme jako $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$.

Pokud $(X, \wedge, \vee)$ je svaz a $Y \subset X$ je uzavřená na $\wedge, \vee$, tak $(Y, \wedge, \vee)$ je podsvaz.

Příklad: 1. *Rozhodněte, zda je svaz, a popište operace* $\wedge, \vee$*:*

1. $(\mathbb{R}, \leq)$
2. *Množina všech podmnožin* $\{1, \ldots, n\}$ *uspořádaná inkluzí.*
3. $(\mathbb{N}, |)$ *(dělitenost)*
4. *Množina všech ideálů okruhu R uspořádaná inkluzí.*
5. *Hasseovy diagramy z obrázku*



Řešení: Není, je, je (NSD,NSN), je ($\cap$, ideál generovaný sjednocením). Hasseovy diagramy: ne, ano, ano, ne, ano (to poslední lze ověřovat elementárně, ale pokud si chce člověk ušetřit práci, lze zavést a zkoumat součin svazů).

Příklad: 2. *Najděte svazově uspořádanou množinu* $(X, \leq)$ *a její podmnožinu* Y *takovou, že* $(Y, \leq)$ *není svazově uspořádaná (tj.* Y *není podsvaz* X*).*

Řešení: Volme $(X, \leq)$ třeba N_5 z předchozího obrázku a Y buďte čtyři dolní vrcholy.

Příklad: 3. *Nakreslete všechny neisomorfní svazy s nejvýše pěti prvky.*

Řešení: Napočítal jsem jeden jednoprvkový, dvouprvkový i trojprvkový, dva čtyřprvkové a tři pětiprvkové.

Příklad: 4. *Svaz se nazývá modulární, pokud pro každé* $z \leq x$ *a každé* y *platí*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$$

Význam: Umíme prvek y *jednoznačným způsobem promítnout mezi* x, z*. Tuto vlastnost má třeba svaz* normálních *podgrup libovolné grupy. Modulární svazy se často zkoumají.*

Dokažte, že pokud svaz X *obsahuje jako podsvaz* N_5*, pak* X *není modulární (platí to i naopak – viz přednáška).*

Řešení: Na obrázku pro N_5 volíme $z = b, y = c, x = a$.

Příklad: 5. *Svaz se nazývá distributivní, pokud pro každé* x, y, z *platí*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Dokažte, že pokud svaz X *obsahuje jako podsvaz* N_5 *nebo* M_3*, pak* X *není distributivní (opět to platí i naopak – viz přednáška).*

Řešení: V N_5 volíme $x = a, y = b, z = c$. V M_3 volíme třeba $x = a, y = b, z = c$.

Příklad: 6. *Dokažte, že každý distributivní svaz je modulární.*

Řešení: Jde to dokázat upravováním rovnic, nebo použít věty z přednášky: Distributivní znamená, že nemáme N_5 ani M_3, takže nemáme N_5 takže svaz je modulární.

Příklad: 7. *Rozhodněte, zda je modulární nebo distributivní:*

1. M_3
2. *Množina všech podmnožin* $\{1, \ldots, n\}$ *uspořádaná inkluzí.*
3. *Množina všech ideálů okruhu* R *uspořádaná inkluzí.*

Řešení: M_3 není distributivní, ale je modulární, zbývající dva příklady jsou distributivní a tedy i modulární.