Domácí úkol číslo 6 – řešení

Zadaní. *Buď $d \in \mathbb{N}$ číslo takové, že $\sqrt{d}$ není celé číslo. Dokažte, že potom pro každý polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ a každé $a, b \in \mathbb{Z}$ platí, že $a + \sqrt{d}b$ je kořenem f, právě když $a - \sqrt{d}b$ je kořenem f (analogie komplexně sdružených kořenů reálných polynomů).*

Řešení: Uvažme okruh $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Protože d není čtvercem přirozeného čísla, platí $a + \sqrt{d}b = 0$, právě když $a = b = 0$.

Nadefinujeme si nyní zobrazení $h : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, které číslu $a + \sqrt{d}b$ přiřadí číslo $a - \sqrt{d}b$. Zjevně h je bijekce a platí $h(k) = k$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Chceme teď ukázat, že h je dokonce automorfismus (isomorfismus ze $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ do sebe).

Není těžké si rozmyslet, že platí $h(s+r) = h(s)+h(r)$ pro každé $r, s \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Ukážeme podrobně, že také $h(s \cdot r) = h(s) \cdot h(r)$ pro každé $r, s \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$:

$$h[(a + \sqrt{d}b) \cdot (a' + \sqrt{d}b')] = h[aa' + dbb' + \sqrt{d}(ba' + ab')] =$$
$$= aa' + dbb' - \sqrt{d}(ba' + ab') = (a - \sqrt{d}b) \cdot (a' - \sqrt{d}b') = h(a + \sqrt{d}b) \cdot h(a' + \sqrt{d}b').$$

Máte tedy h automorfismus okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, který je identita na $\mathbb{Z}$, což je přesně ten správný nástroj pro dokončení důkazu. Buď nyní $f \in \mathbb{Z}[x]$ a mějme $a, b \in \mathbb{Z}$, že platí $f(a+\sqrt{d}b) = 0$. To je rovnost v $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Zapůsobme tedy na obě strany této rovnosti automorfismem h a dostaneme $h(f(a + \sqrt{d}b)) = h(0) = 0$. Protože koeficienty f jsou celá čísla, která se aplikací h nezmění, platí $h(f(r)) = f(h(r))$ pro každé $r \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Potom ale:

$$f(a - \sqrt{d}b) = f(h(a + \sqrt{d}b)) = h(f(a + \sqrt{d}b)) = h(0) = 0,$$

což jsme chtěli.