Domácí úkol číslo 5 – řešení

Zadaní. *Najděte všechna $x, y \in \mathbb{Z}$, pro která platí $x^2 + x = y^3$.*

Řešení: Protože celá čísla tvoří UFD (Gaussův obor), lze y^3 psát ve tvaru $\pm p_1^{3n_1} \dots p_k^{3n_k}$, kde p_i jsou po dvou různá prvočísla a znaménko volíme tak, aby vše fungovalo.

Nutně tedy

$$x(x+1) = \pm p_1^{3n_1} \dots p_k^{3n_k}$$

Nyní $x, x+1$ jsou zjevně nesoudělná čísla, takže každé z $x, x+1$ si ze součinu $\pm p_1^{3n_1} \dots p_k^{3n_k}$ „vezme" jiné prvočíslo (tohle pozorování lze hodně zobecnit, ale my to dělat nebudeme). Dostáváme, že jak x, tak $x+1$ musí být třetí mocninou nějakého celého čísla. (Obecně podobné věci platí až na pronásobení nějakou jednotkou, ale naštěstí v $\mathbb{Z}$ máme jednotky jenom ± 1 a třetí mocnina umožňuje případnou -1 „schovat" dovnitř.) To vypadá poměrně nepravděpodobně.

Buď tedy $x = r^3$, $x + 1 = s^3$ pro nějaká $r, s \in \mathbb{Z}$. Máme

$$\begin{aligned} r^3 + 1 &= s^3 \\ 1 &= s^3 - r^3 = (s-r)(s^2 + sr + r^2) \end{aligned}$$

Víme přitom, že $s^3 > r^3$ a protože třetí mocnina je funkce prostá, musí být $s - r > 0$. Protože s, r jsou celá, musí být $s - r = s^2 + sr + r^2 = 1$.

Teď je asi nejjednodušší prostě dosadit $s = r + 1$ do rovnice $s^2 + sr + r^2 = 1$, čímž dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} (r+1)^2 + r(r+1) + r^2 &= 1 \\ r^2 + 2r + 1 + r^2 + r + r^2 &= 1 \\ 3r^2 + 3r &= 0 \\ r^2 + r &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnice má v $\mathbb{Z}$ dvě řešení $r = 0$ a $r = -1$. Když nyní dosadíme $x = r^3$, $y = \sqrt[3]{x(x+1)}$, dostaneme dvojice $x = 0, y = 0$ a $x = -1, y = 0$, které skutečně řeší i původní rovnici (jak jsme mohli uhádnout už na začátku). Jiná řešení existovat nemohou.