

Třinácté cvičení

4. ledna 2013

Ukážeme si, jak celkem snadno spočítat počet konfigurací různých „až na symetrie“. Symetrie nám bude vyjadřovat působení grupy G na množinu konfigurací.

Burnsideovo lemma říká, že pokud je G konečná grupa působící na množinu X , tak počet orbit tohoto působení je roven

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X : g(x) = x\}|.$$

Příklad 1. Grupa $GL(3, \mathbb{R})$ působí na prostor \mathbb{R}^3 běžným násobením vektoru maticí. Určete počet orbit tohoto působení. Co jsou pevné body působení pro matici A ?

Příklad 2. Kolika způsoby lze sestavit ze 4 červených, 3 bílých a 2 modrých malých rovnostranných trojúhelníků velký trojúhelník (o straně délky 3), který můžeme libovolně otáčet?

Příklad 3. Dětská stavebnice obsahuje devět totožných průhledných čtvercových destiček, na každé z nich je nakreslená šipka směřující ze středu destičky do středu jedné z hran. Kolika způsoby můžeme z takové stavebnice sestavit velký čtverec 3×3 ? Dvě sestavení jsou totožná, pokud jedno z druhého dostaneme otočením nebo převrácením.

Příklad 4. Kolika způsoby lze obarvit černou a bílou barvou políčka mřížky

a) 2×2 ,

b) 3×3 ,

c) $n \times n$,

pokud mřížku můžeme otáčet?

Příklad 5. Totéž jako výše, ale mřížku můžeme i obracet (je průhledná).

Příklad 6. Kolik existuje neisomorfních grafů na 4 vrcholech?