Desáté cvičení

7. prosince 2012

Pokud je $a_n x^n + \cdots + a_0$ polynom s celočíselnými koeficienty a p/q je jeho racionální kořen v základním tvaru (p, q nesoudělné), tak platí $p|a_0$ a $q|a_n$. Tímto způsobem se dají určit všechny racionální kořeny daného polynomu.

Eisensteinovo kritérium pro ireducibilitu polynomu nad $\mathbb{Z}[x]$: Pokud máme polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ a p prvočíslo takové, že

- $\mathrm{NSD}(a_n, \ldots, a_0) = 1$ (f je primitivní),
- $p \mid a_i$ pro $i = 0, \ldots, n-1$
- p^2 nedělí a_0,

tak je f ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$. Dá se tak dokazovat ireducibilita polynomů vysokých stupňů.

Příklad 1. Najděte všechny racionální kořeny a určete jejich násobnost:

a) $x^{10} - 2$,

b) $2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 3$,

c) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$.

Příklad 2. Dokažte, že následující polynomy jsou ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$:

a) $x^6 + 10x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 14$

b) $x^n - 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

c) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + x^2 - 13x - 5$ (Triková úloha; zkuste polynom zkrášlit pomocí substituce.)

Příklad 3. Dokažte Eisensteinovo kritérium. Rada: Nechť f splňuje Eisensteina a platí $f = g \cdot h$. Dokažte, že pak p dělí konstantní členy g i h a že z toho plyne spor.

Příklad 4. Pro polynom $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ nad okruhem R definujeme jeho algebraickou derivaci $Df = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. Značme $D^k f$ k-tou derivaci f. Rádi bychom aby platilo, že r je k-násobný kořen f, právě když $f(r) = Df(r) = \cdots = D^{k-1} f(r) = 0$ a $D^k f(r) \neq 0$. To je velmi často pravda, problémy nám dělají jenom okruhy nenulové charakteristiky:

a) Spočtěte pomocí derivací násobnost kořene 2 polynomu

$$x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 33x^2 + 12x + 68 \in \mathbb{Z}[x].$$

b) Jak je to s násobností kořene 1 a hodnotami derivací polynomu $x^3 - 1$ nad $\mathbb{Z}_3$?