

## Co se nestihlo, aneb proč svaz ideálů okruhu není distributivní

Zvolme okruh  $\mathbb{C}[x, y]$ . To je podle Gaussovy věty z prosemináře UFD, ale není to OIHI. Uvažme následující ideály  $I_1 = (x)$ ,  $I_2 = (y)$ ,  $I_3 = (x + y)$ . Potom jistě

$$x + y \in I_3 = (I_1 + I_2) \cap I_3.$$

Podle distributivního zákona má platit

$$x + y \in (I_1 \cap I_3) + (I_2 \cap I_3).$$

Přitom ale  $I_1 \cap I_3$  obsahuje právě všechny polynomy dělitelné  $x$  a  $x + y$ , tedy (protože  $\mathbb{C}[x, y]$  je UFD) je to ideál  $(x(x + y))$ . Podobně  $I_2 \cap I_3 = (y(x + y))$ . Tedy má platit

$$x + y = x(x + y)p + y(x + y)q = (xp + yq)(x + y)$$

pro nějaké polynomy  $p, q \in \mathbb{C}[x, y]$ . Ale pak by muselo být  $xp + yq = 1$ , přičemž polynom nalevo má absolutní člen vždy roven nule, spor.