Cvičení 19. 4. 2012

V komplexních číslech má každý polynom právě tolik kořenů, kolik je jeho stupeň (násobné kořeny počítáme vícekrát). Pokud p je polynom s reálnými koeficienty, tak α je n-násobný kořen p, právě když $\overline{\alpha}$ je n-násobný kořen p.

Příklad 1. Dokažte, že v $\mathbb{R}[x]$ mají všechny ireducibilní polynomy stupeň 1 nebo 2.

Příklad 2. Mějme pravidelný n-úhelník vepsaný jednotkové kružnici. Určete hodnotu součinu vzdáleností jednoho bodu od ostatních.

Příklad 3. Pokud I je ideál v $\mathbb{C}[x]$, můžeme mu přiřadit množinu nulových bodů

$$N_I = \{s \in \mathbb{C} : \forall f \in I, f(s) = 0\}.$$

Jak vypadá N_I pro:

1. $I = 0$,
2. $I = \mathbb{C}[x]$,
3. I maximální ideál,
4. $I = (f)$ pro f polynom?

Příklad 4. Číslo α je primitivní n-tý kořen jednotky, pokud n je nejmenší, že platí $\alpha^n = 1$. Polynom $\Phi_n(x) = \prod(x - \alpha)$, kde součin běží přes všechny primitivní n-té kořeny jednotky, se nazývá n-tý cyklotomický polynom. Dokažte, že každý cyklotomický polynom má všechny koeficienty celočíselné.