Cvičení 12. 4. 2012

Buď R obor integrity, p polynom z $R[x]$. Pak pro každý kořen α polynomu $p \in R[x]$ platí $x - \alpha | p$. Kořen α se nazývá k-násobný, pokud k je největší přirozené číslo, že $(x-\alpha)^k | p$. Důsledek: Pokud každý kořen počítám tolikrát, kolik je jeho násobnost, tak p stupně n má nejvýše n kořenů.

V takzvaných úplných tělesech (příklad: $\mathbb{C}$) mají všechny nenulové polynomy právě tolik kořenů (s násobnostmi), kolik je jejich stupeň.

Derivace polynomu $p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom

$$D(p) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 1 \cdot a_1$$

(umíme derivovat i bez limit!). Značíme $D^{i+1} = D(D^i(f)), D^0(f) = f$.

Věta 1. Buď R obor integrity, $f \in R[x]$, $s \in R$, charakteristika R je 0 nebo větší než stupeň f. Potom s je n-násobným kořenem f, právě když je s kořenem

$$f, D(f), D^2(f), \ldots, D^{n-1}(f)$$

ale ne $D^n(f)$.

Větu lze zobecnit na s z většího okruhu než R (například z komplexních čísel pro celočíselné polynomy).

Jako důsledek má f jen jednoduché kořeny v R (oboru integrity rozumné charakteristiky), právě když $(f, D(f))$ nemá v R žádný kořen. Proto se vyplatí spočítat $(f, D(f))$.

Příklad 1. Zjistěte násobnost kořene v polynomu:

1. 1 v $x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 3$ v $\mathbb{Z}_5[x]$
2. 6 v $x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 3$ v $\mathbb{Z}_7[x]$
3. 1 v $x^4 + x^3 + 2x + 2$ v $\mathbb{Z}_3[x]$

Příklad 2. Dokažte, že pokud je $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ zlomek v základním tvaru, který je kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty

$$p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tak $r | a_0$ a $s | a_n$.

Příklad 3. Najděte kořeny v $\mathbb{Q}$ a určete jejich násobnosti:

1. $x^{10} - 1$
2. $2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$
3. $x^5 - 5x^2 - 5x + 1$

Příklad 4. Najděte v $\mathbb{R}[x]$ resp. v $\mathbb{Z}[x]$ všechny ireducibilní polynomy, které mají aspoň jeden kořen v $\mathbb{R}$ resp. v $\mathbb{Z}$.

Příklad 5. Buď $f \in \mathbb{C}[x]$ polynom stupně 20. Určete počet jeho různých kořenů, víte-li, že stupeň $(f, D(f))$ je

1. 0
2. 19
3. 11

Příklad 6. Najděte R obor integrity, $f \in R[x]$ stupně aspoň 1 že existuje $r \in R$ a $k \in \mathbb{N}$, že r je k násobný kořen f a zároveň kořen $D^k(f)$.

Příklad 7. Dokažte, že když T je konečné těleso, tak lze najít $f \in T[x]$ stupně aspoň 1, který nemá v T žádný kořen.