Cvičení 5. 4. 2012

Bud R obor integrity. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický, pokud se nezmění po přečíslování proměnných.

Elementární symetrické polynomy jsou polynomy

$$\delta_{i,n} = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_i \le n} x_{j_1} \cdots x_{j_i}.$$

Z přednášky víte, že každý symetrický polynom z $R[x_1, \dots, x_n]$ lze jednoznačně vyjádřit pomocí polynomů $\delta_{1,n}, \dots, \delta_{n,n}$ (povolené operace jsou násobení, sčítání a násobení prvkem R – vlastně vyjadřujeme symetrický polynom jako polynomiální funkci $\delta_{1,n}, \dots, \delta_{n,n}$).

Hrubý postup vyjádření symetrického polynomu pomocí $\delta_{1,n}, \dots, \delta_{n,n}$: Vždy se snažíme zbavit nejkoncentrovanějších mocnin, které nám ještě zbývají.

Symetrické polynomy se objevují například ve Viètových vztazích: Koeficienty polynomu jsou symetrické polynomy kořenů. Pokud $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ je polynom o n kořenech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nad oborem integrity R, tak platí:

$$\begin{aligned} a_{n-1}/a_n &= -\delta_{1,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ a_{n-2}/a_n &= \delta_{2,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &\vdots \\ a_1/a_n &= (-1)^{n-1}\delta_{n-1,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ a_0/a_n &= (-1)^n \delta_{n,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

Příklad 1. V $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ napište pomocí $\delta_{1,3}$, $\delta_{2,3}$, $\delta_{3,3}$:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2. $x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_2^2 x_1^3 + x_2^2 x_3^3 + x_3^2 x_1^3 + x_3^2 x_2^3$
3. $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$

Příklad 2. Vyjádřete $1/x_1x_2 + 1/x_1x_3 + 1/x_2x_3$ jako funkci $\delta_{1,3}$, $\delta_{2,3}$ a $\delta_{3,3}$.

Příklad 3. Buď $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polynom nad $\mathbb{C}$, značme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jeho kořeny. Najděte vzorec pro:

1. $\frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$
2. $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$

3. $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$

Příklad 4. Buď p polynom nad $\mathbb{C}$ (nebo jiným vhodným tělesem). Pokud $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny p, tak výraz

$$\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

se nazývá diskriminant p. Diskriminant je symetrický polynom kořenů a je nulový, právě když p má násobné kořeny. Spočtěte diskriminant pro:

1. p kvadratický
2. p kubický tvaru $x^3 + ax + b$

Příklad 5. Místo elementárních symetrických polynomů lze volit i jiné báze pro symetrické polynomy. Vyjádřete $\delta_{1,4}, \delta_{2,4}, \delta_{3,4}, \delta_{4,4}$ pomocí polynomů $p_{i,4} = x_1^i + x_2^i + x_3^i + x_4^i$, kde $i = 1, 2, 3, 4$.