Cvičení 29. 3. 2012

Diofantické rovnice jsou rovnice, jejichž řešení hledáme pouze mezi celými (nebo přirozenými) čísly. Obecně je jejich řešení těžké, ale existují na ně užitečné triky.

Dnes se zaměříme na využití jednoznačného rozkladu čísla na prvočinitele (kvůli kterému se nám občas vyplatí ze $\mathbb{Z}$ utéct do většího oborů typu $\mathbb{Z}[i]$). Jiné oblíbené triky: Počítání modulo nějaké šikovně zvolené číslo a využití odhadů a nerovností. Často se také mužeme omezit jenom na nesoudělná řešení.

Příklad 1. Doplňte následující tabulku:

okruh	obor integrity	gaussovský	OIHI	euklidovský	noetherovský
$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{Z}_{10}$					
$\mathbb{Z}[x]$					
$\mathbb{Z}[x, y]$					
$\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$					
$\mathbb{Z}[i]$					
$\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$					
$\mathbb{R}$					

Příklad 2. Buďte $a_1, \dots, a_n, d \in \mathbb{Z}$. Dokažte, že rovnice

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d$$

má celočíselné řešení, právě když $NSD(a_1, \dots, a_n)|d$.

Příklad 3. Vyřešte v $\mathbb{Z}$ rovnice:

1. $x^2 = 27y$
2. $y^3 - x^3 = 91$
3. $x^2 + x = y^3$

Příklad 4. Buď $x, y \in \mathbb{Z}$ řešení rovnice $x^2 + 1 = y^3$. Dokažte, že:

1. Čísla $x + i$ a $x - i$ jsou v $\mathbb{Z}[i]$ nesoudělná.
2. Výraz $x \pm i$ je v $\mathbb{Z}[i]$ třetí mocnina nějakého prvku.
3. Jediné x splňující, že $x + i$ je třetí mocnina v $\mathbb{Z}[i]$, je $x = 0$.

Příklad 5. Vyřešte v $\mathbb{Z}$ rovnice $x^2 + 2 = y^3$ a $x^2 + 4 = y^3$.

Příklad 6 (Obecná Pellova rovnice)**.** Buď $d > 0$ nečtvercové celé číslo. Označme G množinu všech kladných čísel $a + \sqrt{d}b$, že $a, b \in \mathbb{Z}$ a platí $a^2 - db^2 = 1$. Předpokládejme, že G obsahuje aspoň jeden prvek různý od 1 (tak tomu vždy je). Dokažte:

1. G s násobením zděděným z $\mathbb{R}$ tvoří grupu
2. G je nekonečná cyklická grupa