Cvičení 10. 5. 2012

Rozšíření těles lze použít k důkazům, že některá čísla nelze zkonstruovat danými metodami. Algebra 19. století (Pierre Wantzel, 1837) tak ukázala, že čtyři klasické geometrické problémy nemají řešení pravítkem a kružítkem.

Co to znamená konstruovat něco pravítkem a kružítkem:

1. Máme danou množinu M_i bodů v rovině.
2. Dvěma body z M_i můžeme proložit přímku. Také můžeme jeden bod $A \in M_i$ vzít jako střed a úsečku mezi dalšími body $B, C \in M_i$ jako poloměr a narýsovat kružnici.
3. Nový bod m dostaneme jako libovolný průsečík dvou přímek, přímky a kružnice nebo dvou kružnic zkonstruovaných podle 2 (degenerovaný případ průsečíku přímky nebo kružnice se sebou samou neuvažujeme).
4. $M_{i+1} := M_i \cup \{m\}$

Na začátku máme danou množinu bodů M_0 a chceme sestrojit M_i obsahující bod X zadaných vlastností. Předpokládáme, že v rovině máme kartézskou soustavu souřadnic a množině M_i přiřadíme nejmenší nadtěleso $\mathbb{Q}$ obsahující x-ové a y-ové souřadnice všech bodů z M_i. Toto těleso budeme značit T_i.

Příklad 1. Ověřte, že problém rozdělení úhlu na dvě stejné části je řešitelný pomocí pravítka a kružítka. (Máme $M_0 = \{(0,0), (1,0), (a,b)$ a chceme sestrojit bod X tak, aby $(0,0)X$ byla osa úhlu $(1,0)(0,0)(a,b)$.)

Příklad 2. Buď M_i nějaká množina bodů, T_i příslušné těleso. Ověřte, že pokud m je průsečík dvou přímek určených body z M_i, tak $T_{i+1} = T_i$.

Příklad 3. Buď M_i nějaká množina bodů, T_i příslušné těleso. Ověřte, že pokud m je průsečík přímky a kružnice určených body z M_i, tak $T_{i+1} = T_i$ nebo T_{i+1} je rozšíření T_i stupně 2.

Příklad 4. Buď M_i nějaká množina bodů, T_i příslušné těleso. Ověřte, že pokud m je průsečík dvou kružnic určených body z M_i, tak $T_{i+1} = T_i$ nebo T_{i+1} je rozšíření T_i stupně 2.

Příklad 5. Dokažte, že $[T_i : T_0]$ je vždy mocnina 2.

Příklad 6. Úlohu rektifikace kružnice můžeme přeformulovat jako konstrukci bodu o souřadnicích $(0, \pi)$ z výchozí množiny bodů $M = \{(0,0),(1,0)\}$. Dokažte, že tato úloha není řešitelná pravítkem a kružítkem za předpokladu transcendentnosti π.

Příklad 7. Úlohu kvadratury kruhu můžeme přeformulovat jako konstrukci bodu o souřadnicích $(0, \sqrt{\pi})$ z výchozí množiny bodů $M = \{(0,0),(1,0)\}$. Dokažte, že tato úloha není řešitelná pravítkem a kružítkem za předpokladu transcendentnosti π.

Příklad 8. Úloha zdvojení krychle je ekvivalení nalezení bodu $(0, \sqrt[3]{2})$ z výchozí množiny bodů $M = \{(0,0),(1,0)\}$. Dokažte, že tato úloha není řešitelná pravítkem a kružítkem.

Příklad 9. Úloha trisekce úhlu spočívá v rozdělení daného úhlu na třetiny. Dokaže, že úhel $60°$ nelze pomocí pravítka a kružítka roztřetit: Zadaná množina M_0 je $\{(0,0),(1,0),(1,\sqrt{3})\}$ a chceme vyrobit bod na přímce $(t, t \cdot \operatorname{tg} 20°)$ pro $t \neq 0$. Mohl by se vám hodit vzoreček $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.