Cvičení 26. 4. 2012

Buď $T \leq K$ tělesa (třeba $T = \mathbb{R}, K = \mathbb{C}$), $a \in K \setminus T$. Potom značíme $T[a]$ okruh vzniklý přidáním a do T a $T(a)$ těleso vzniklé přidáním („adjukcí“) a do T. Prvek $a \in K$ je algebraický nad T, pokud existuje $f \in T[x]$ nenulový, že $f(a) = 0$, jinak je a transcendentní. Pokud a je algebraický, tak polynom $m_{a,T} \neq 0$ minimálního stupně, že $m_{a,T}(a) = 0$, nazýváme minimální polynom prvku a nad T.

Pozorování: $K, T[a], T(a)$ jsou vektorové prostory nad T. Dimenze K nad T se značí $[K : T]$ a říká se jí „stupeň rozšíření K nad T“.

Věta 1. Pokud je a algebraický nad T, tak $T[a] = T(a)$ a navíc $[T(a) : T]$ je roven stupni minimálního polynomu a.

Věta 2 (užitečná pro výpočet stupňů)**.** Platí $[T : L] = [T : K][K : L]$ pro $L \leq K \leq T$ tělesa.

Příklad 1 (zákeřný)**.** Jaký je vztah mezi stupněm rozšíření $[T(a_1, \ldots, a_n) : T]$ a číslem n?

Příklad 2. Rozhodněte, zda jsou následující prvky algebraické a najděte případný minimální polynom (vše je uvnitř $\mathbb{C}$):

1. $3/4$ nad $\mathbb{Q}$
2. $\sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$
3. π nad $\mathbb{Q}$
4. π nad $\mathbb{R}$
5. $i + 1$ nad $\mathbb{R}$

Příklad 3. Spočtěte stupně rozšíření:

1. $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$
2. $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$
3. $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$
4. $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$
5. $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}]$

Příklad 4. Rozhodněte, zda $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ je isomorfní $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Co $\mathbb{R}(e^{2\pi i/2})$ a $\mathbb{R}(e^{4\pi i/3})$?

Příklad 5 (cyklotomické těleso)**.** Jaký stupeň má rozšíření $\mathbb{Q}$ vzniklé adjunkcí n-tého primitivního kořene jedničky $\exp(2\pi i/n)$?

Příklad 6. Polynom $p(x) = x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23$ má kořen $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$. Pomocí stupně rozšíření tělesa $\mathbb{Q}$ dokažte, že p je ireducibilní v $\mathbb{Q}[x]$.