Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 7 domácích úkolů

Termín odevzdání: 29. listopadu 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
Σ	10	

Problém 1. Najděte vlastní kužel $K \subseteq \mathbb{R}^6$, vektor $\mathbf{c}$, $\mathbf{g}$ a matici F tak, aby problém kuželového programování řádu dva:

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } t \\ &\text{za podmínek } \|(x_1, 2x_2 + 2)\|_2 - t \leq 0 \\ &\qquad\qquad\qquad \|(1, x_2)\|_2 - x_1 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

byl ekvivalentní kuželovému problému

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \mathbf{c}^T\mathbf{y} \\ &\text{za podmínek } F\mathbf{y} + \mathbf{g} \preceq_K 0. \end{aligned}$$

Problém 2. Mějme problém nejmenších čtverců s lineárními omezeními ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ \text{za podmínek } & G\mathbf{x} = \mathbf{h}, \end{aligned}$$

kde A je matice $m \times n$ hodnosti n a G je matice $p \times n$ hodnosti p. Použijte KKT podmínky k nalezení rovnic, jejichž řešení dává primární optimální řešení $\mathbf{x}^\star$ a duální optimální řešení $\nu^\star$.

Problém 3. Mějme problém

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizujte} & -\sqrt{x_1+1}-\sqrt{x_2-2} \\ \text{za podmínek} & 3x_1+2x_2 \le 10 \\ & x_2 \le 5 \end{array}$$

Zavedeme si Lagrangián

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = -\sqrt{x_1+1}-\sqrt{x_2-2}+\lambda_1(3x_1+2x_2-10)+\lambda_2(x_2-5)$$

1. Ověřte, že zadaný problém splňuje Slaterovu podmínku.
2. Optimální duální řešení je $\lambda^\star = (\sqrt{30}/36, 0)$. Spočtěte pomocí KKT kritéria (bez použití počítače) optimální řešení primárního problému.

Problém 4 (two-way partitioning)**.** Uvažme problém rozdělení skupiny n lidí do dvou skupin, tak aby všichni byli co nejméně naštvaní. Pro i-tého a j-tého člověka si označím $W_{i,j}$, jak moc nechtějí být i a j spolu. Budeme předpokládat, že matice W je symetrická. Rozdělení lidí do skupin si zakóduji jako vektor $\mathbf{x}$ jehož komponenty budou $+1$ a -1. Celková míra naštvanosti pak bude

$$\sum_{i,j=1}^{n} W_{ij} x_i x_j = \mathbf{x} W \mathbf{x}$$

(tj příspěvek W_{ij} je záporný, pokud $x_i \neq x_j$ a kladný pokud $x_i = x_j$). Toto bohužel není konvexní problém, protože nemůžeme někoho umístit do skupiny jenom zčásti, ale to nám nevadí.

1. Zformulujte duální problém k problému

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & \mathbf{x}^T W \mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & x_i^2 = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

   jako problém semidefinitního programování.

2. Co nám říká slabá věta o dualitě o řešení původního problému a číslu $d^\star$?

3. Vyrešte duální problém k problému rozdělení do dvou skupin pomocí CVXOPT/CVXPY pro $n = 6$ a matici

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Svůj kód mi pošlete na adresu kazda@karlin.mff.cuni.cz Na stejný mail mi pošlete i hodnoty optimálního řešení (nemusíte je sem psát).

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.