

Sada 6 domácích úkolů

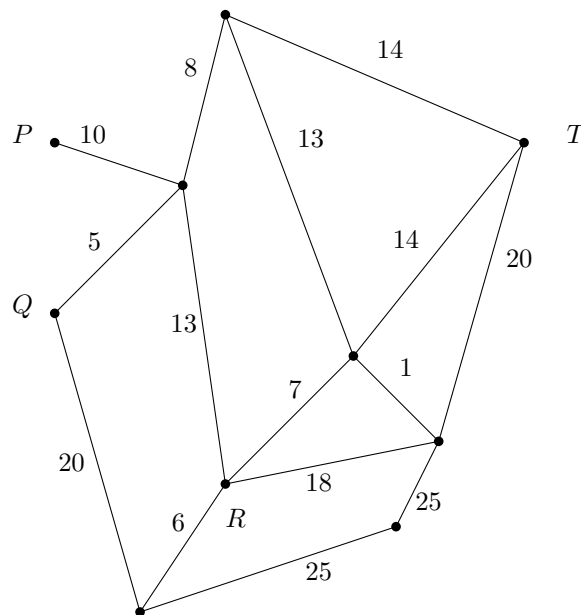
Termín odevzdání: 22. listopadu 2018 ve 12:21

Problém	Bodů max	Bodů
1	3	
2	2	
3	2	
4	3	
Σ	10	

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém 1. Uvažme elektrickou síť jako na obrázku. Úsečky jsou vedení a uzly jsou stanice, které umí dělit/slučovat a posílat příchozí výkon do jiných vedení (neumí ale elektřinu vyrábět ani skladovat; výjimkou jsou elektrárny P, Q, R a továrna T – viz dále). Každý úsek vedení může vést maximálně tolik MW energie, kolik je u něj poznačeno na obrázku.

Naším cílem je poslat z elektráren P, Q, R co nejvíce energie do továrny T . Můžeme předpokládat, že elektrárny mohou produkovat neomezeně mnoho energie.



- a) Zformulujte problém jako lineární program (P). Vysvětlete svůj postup. Podmínky programu stačí napsat ve tvaru „ i -tá podmínka má tvar $té$ a $té$ nerovnosti/rovnosti s kapacitou $těch$ a $těch$ vedení“, tj. nemusíte rozepisovat konkrétní hodnoty.
- b) Zformulujte duální problém k (P) (opět nemusíte psát konkrétní čísla). Vysvětlete svůj postup.
- c) Vyřešte duální problém na počítači (teď už pro zadané kapacity). Svůj kód mi nemusíte posílat, stačí mi tu uvést hodnoty *duálních* proměnných, které tvoří optimální řešení.

Místo na řešení úlohy 2

Problém 2 (Dualita pro kuželové programování). Mějme kuželový optimalizační problém (P)

$$\begin{aligned} & \text{minimalizujte } \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ & \text{za podmíněk } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \succeq_K \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde K je (vlastní konvexní) kužel. Zformulujte co nejlepší dolní odhad na optimální hodnotu (P) ve formě optimalizační úlohy „maximalizujte . . . za podmíněk . . .“

Rada: Budete potřebovat duální kužel ke K .

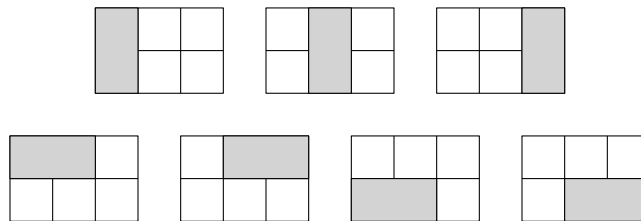
Ještě větší rada: Pokud $\mathbf{c} \succeq_{K^*} \mathbf{d}$, tak pro všechna $\mathbf{x} \succeq_K \mathbf{0}$ platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{d}^T \mathbf{x}$.

Problém 3. Dokažte pomocí Farkašova lemmatu (bez použití počítače), že soustava lineárních rovnic a nerovnic

$$\begin{aligned}2x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_6 &= -2 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 0 \\x_1, x_2, \dots, x_7 &\geq 0\end{aligned}$$

nemá řešení.

Problém 4. Zjednodušená hra „Lodě“ se sestává z jednoho kola, kdy první hráč umístí loď 1×2 (horizontálně nebo vertikálně) na hrací plochu 2×3 do jednoho ze sedmi možných postavení:



Druhý hráč si mezi tím, aniž by věděl, kam byla loď umístěna, vybere jedno ze 6 políček hrací plochy jako cíl. Oba hráči si pak současně sdělí své tahy.

Pokud loď prvního hráče obsahuje políčko vybrané druhým hráčem jako cíl, tak první hráč ztratí bod a druhý hráč dostane bod. Pokud loď prvního hráče neobsahuje cíl druhého hráče, tak první hráč získává bod a druhý hráč ztrácí bod.

Aby byli méně předvídatelní, mohou oba hráči volit své tahy náhodně (a pochopitelně nezávisle). Strategie prvního hráče se bude sestávat z pravděpodobností p_1, \dots, p_7 voleb pozice 1 až 7 pro loď. Strategie druhého hráče se bude sestávat z pravděpodobností q_1, \dots, q_6 výběru i -tého pole jako cíle.

Řekneme, že strategie prvního hráče je optimální v nejhorším případě, pokud maximalizuje střední hodnotu zisk bodů prvního hráče i v případě, že druhý hráč zná čísla p_1, \dots, p_7 a volí svá čísla q_1, \dots, q_6 podle nich (tj. pokud si třeba jako první hráč volím každou pozici lodi s pravděpodobností $1/7$, tak druhý hráč se to v nejhorším případě dozví a bude vítězit s pravděpodobností $3/7$ soustavným ostřelováním políčka v prostředním sloupci a horní řadě).

Zformulujte (se zdůvodněním, co a proč volíte) konvexní program, který vám pomůže spočítat strategii prvního hráče, která je optimální v nejhorším případě. Program pak vyřešte pomocí knihovny CVXOPT/CVXPY, napište mi sem výslednou optimální stragii a program mi pošlete na kazda@karlin.mff.cuni.cz.

Místo na řešení úlohy 4

Při řešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.