Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 5 domácích úkolů

Termín odevzdání: 16. listopadu 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
Σ	10	

Problém 1. Dokažte, že libovolný konvexní optimizační problém P je ekvivalentní nějakému konvexnímu optimalizačnímu problému Q s lineární účelovou funkcí.

Problém 2 (Stopa versus lineární formy)**.** Při formulaci SDP ve standardním tvaru se běžně používá stopa matic. Je tomu tak proto, že stopa součinu matic má význam skalárního součinu na S^n. V této úloze si dokážete speciální případ tohoto faktu:

Buď $n \in \mathbb{N}$ a f buď lineární zobrazení $S^n \to \mathbb{R}$. Dokažte, že pak existuje matice $C \in S^n$ taková, že pro všechna $X \in S^n$ platí $f(X) = \mathrm{Tr}(CX)$.

Problém 3. Dokažte, že duální kužel k S_+^n v prostoru S^n je zase S_+^n.

1. Definujeme $(S_+^n)^\star = \{A \in S^n : \forall B \in S_+^n, \mathrm{Tr}(BA) \geq 0\}$. Dokažte, že $(S_+^n)^\star \subseteq S_+^n$.
2. Buďte $A, B \in S_+^n$. Použijte fakt, že existuje C taková, že $B = CC^T$, k důkazu, že $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$. Vysvětlete, jak z toho plyne $S_+^n \subseteq (S_+^n)^\star$.

Pozn: Bude se vám hodit, že pokud A je matice $n \times m$ an B je matice $m \times n$, tak $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (to je základní lineární algebra) a že pro každý vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je vnější/tenzorový součin $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ prvek S_+^n (to bylo v první sérii dú). Tato fakta můžete použít bez důkazu.

Problém 4. Pro A matici $n \times n$ definujeme její 2-normu jako

$$\|A\|_2 = \sup\{\|A\mathbf{v}\|_2 \colon \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\|_2 = 1\}.$$

Dokažte, že

$$\|A\|_2 = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \colon A^T A \preceq s^2 I\},$$

kde I je jednotková matice stejných rozměrů jako A.

Problém 5. Naším cílem je použít semidefinitní programování (a CVXOPT/CVXPY) k vyřešení následující úlohy: Najděte symetrickou matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1+a & -2+a-b \\ -2+a-b & -1+b \end{pmatrix},$$

s minimální 2-normou. Použijte tvrzení z předchozí úlohy k formulaci (se stručným komentářem) semidefinitního programu, jehož optimalní řešení vám dá takovou matici. Program pak vyřešte na počítači a napište mi sem hodnoty optimálních a, b. Svůj program mi pošlete na adresu kazda@karlin.mff.cuni.cz.

Můžete bez důkazu použít, že pro $t \geq 0$, jednotkovou 2×2 matici I a libovolnou 2×2 matici A platí

$$\begin{pmatrix} tI & A \\ A^T & tI \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^T A \preceq t^2 I.$$

V CVXOPT budete potřebovat funkci `cvxopt.solvers.sdp`

Sem můžete psát taky!

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.