

Sada 4 domácích úkolů

Termín odevzdání: 8.11. 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	4	
3	4	
Σ	10	

Problém 1. Převed'te úlohu semidefinitního programování z tvaru s nerovnostmi

minimalizujte $-x_1 - x_2 - x_3$

za podmínky $x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} 30 & -2 \\ -2 & 40 \end{pmatrix}$

na standardní tvar (viz sekce 4.6.2).

Problém 2 (Dvoukriteriální optimalizace). Naše portfolio se může skládat ze čtyř druhů akcií, řekněme jim 1, 2, 3 a 4. Zisk z investice do těchto akcií je náhodná veličina. Pokud x_i bude zlomek našich prostředků investovaný do i -tého druhu akcií, tak očekáváme zisk $0,1x_1 + 0,06x_2 + 0,03x_3 + 0,01x_4$. Navíc známe kovarianční matici

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-2} & 0 & -10^{-4} & 10^{-4} \\ 0 & 10^{-2} & -10^{-5} & 0 \\ -10^{-4} & -10^{-5} & 10^{-3} & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix},$$

která nám umožní spočítat rozptyl našeho zisku jako $\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$.

Chceme maximalizovat zisk a minimalizovat rozptyl, což budeme dělat tak, že si zvolíme míru averze vůči riziku a budeme chtít investovat jednu jednotku prostředků tak, abychom maximalizovali $0,1x_1 + 0,06x_2 + 0,03x_3 + 0,01x_4 - \gamma \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$.

Pro fixní $\gamma \geq 0$ tuto úlohu zformulujte jako konvexní problém a rozhodněte s pomocí CVXOPT/CVXPY, jak rozdělit naše prostředky pro γ jdoucí od 0 do 10 v krocích délky 0,5.

Do papírového řešení zformulujte (s komentářem) konvexní program, který řešíte a stručně okomentujte výsledek z CVXOPT/CVXPY (ve stylu „Opatrnému investorovi bych doporučil(a) to a to, investorovi, kterému nevádí riziko, to a to. . .“). Mailem mi pak pošlete svůj program a výsledky svého výpočtu.

Problém 3 (geometrický program s bakteriemi z přednášky). Pomocí knihovny CVXOPT/CVXPY vyřešte geometrický program s omezením růstu bakterií (minimalizace maximálního vlastního čísla) z přednášky pro tuto konkrétní situaci: Koeficienty s_1, s_2, s_3 jsou všechny rovné 0, 7. Máme k dispozici dvě látky, C a D, které můžeme na bakterie nalít. Koncentrace C bude značená c , koncentrace D bude značená d (berme to tak, že koncentrace je vždy kladná). “Rozmnožovací” parametry závisí na c, d následovně:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{0,5}{c} \\ b_2 &= \frac{0,7}{cd} \\ b_3 &= 0,5\frac{c}{d} \\ b_4 &= 0,4cd \end{aligned}$$

Zformulujte geometrický program pro minimalizaci největšího vlastního čísla matice

$$\begin{pmatrix} b_1(c, d) & b_2(c, d) & b_3(c, d) & b_4(c, d) \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix}$$

a najděte optimální řešení pomocí CVXOPT/CVXPY. (CVXOPT má zabudovanou funkci pro řešení geometrických programů, která ale vyžaduje provést substituci typu $x = \exp(z)$.) Zformulovaný program (buď ve tvaru GP, nebo CP po substituci, to je na Vás) a λ, c, d z nalezeného optimálního řešení mi sem napište a svůj kód mi pošlete na kazda@karlin.mff.cuni.cz.

Pozn: Pokud vám řešič hází záhadnou chybu, kde si stěžuje na to, že rank nějakých matic je moc malý, tak je to proto, že CVXOPT se nedokáže vyrovnat s nejednoznačností optimálního vektoru (v_1, v_2, v_3, v_4) . Pomůže buď natvrdo nastavit třeba $v_1 = 1$ nebo přidat umělou podmínku typu „ $v_1 v_2 v_3 v_4 = 1$ “.

Sem můžete psát taky!

Při řešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.