

Sada 3 domácích úkolů

Termín odevzdání: 1. listopadu 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
Σ	10	

Problém 1. Buďte $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ norma, A matice $n \times m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $d \in \mathbb{R}$. Podrobně dokažte, že pak funkce $f(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} + \mathbf{b}\| - \mathbf{c}^T \mathbf{x} - d$ je konvexní (můžete bez důkazu použít, že norma je konvexní funkce).

Problém 2. Podrobně dokažte, že funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní, právě když její epigraf je konvexní podmnožina \mathbb{R}^{n+1} .

Problém 3. Buď ρ pravděpodobnostní míra na \mathbb{R}^n , tj. míra taková, že $\rho(\mathbb{R}^n) = 1$. Pro bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definujeme *poloprostorovou hloubku* bodu \mathbf{x} , značenou $D(\mathbf{x})$, jako infimum

$$D(\mathbf{x}) = \inf\{\rho(H) : H \text{ je poloprostor s hranicí procházející } \mathbf{x}\}$$

(zde $\rho(H)$ je míra H včetně hranice). Dokažte, že D je kvazikonkávní funkce, tj. $-D$ je kvazikonvexní.

Pokud jste nepotkali pojem míry, vyřešte diskrétní verzi tohoto problému: V \mathbb{R}^n máme N bodů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$, každý bod má váhu $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}_+$, kde $\sum_{i=1}^N w_i = 1$. Míra množiny $S \subset \mathbb{R}^n$, značená $\rho(S)$, je pak součet vah bodů uvnitř S .

Pozn.: Pojem poloprostorové hloubky se používá ke zobecnění pojmu medián na více dimenzí. Zobecněný medián je bod \mathbf{x} , který maximalizuje D .

Problém 4. 21 trpaslíků těží uhlí v dole. Protože se trpaslíci liší v pracovitosti a šikovnosti, chtěli bychom vědět, jak moc toho ten který trpaslík za den natěží. Bohužel máme k dispozici jenom údaje o tom, které dny byl který trpaslík v práci a kolik uhlí se daný den natěžilo celkem (soubor trpaslici.csv na mém webu: Sloupce jsou dny, řádky docházka jednotlivých trpaslíků, kde 0 je absence; poslední řádek souboru je počet natěžených tun uhlí).

Zformulujte úlohu jako problém nejmenších čtverců a vyřešte ji pomocí CVXOPT (nebo CVXPY). K načtení dat o trpaslících se vám mohou hodit knihovny csv nebo pandas pro Python (ale nevádí mi, když údaje z csv souborů natvrdo zkopírujete do svého kódu).

Svůj program mi pošlete do termínu odevzdání na adresu kazda@karlin.mff.cuni.cz. Součástí řešení je jak program, tak slovní zdůvodnění vašeho postupu a stručný komentář pokud jde o realističnost výsledku, který jste dostali (obojí pište sem, ne do mailu nebo programu).

Při řešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.