Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 2 domácích úkolů

Termín odevzdání: 25. října 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	
Σ	10	

Problém 1. Najděte dvě konvexní funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že f a g jsou konečné a definované na celé množině $\mathbb{R}$ a přitom funkce $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ není konvexní. Je tento příklad ve sporu s větou o infimu konvexní funkce (sekce 3.2.5 učebnice)? Zdůvodněte.

Problém 2. Dokažte, že funkce $f_2(x_1, x_2) = \ln(\exp(x_1) + \exp(x_2))$ je konvexní.

Problém 3. S použitím předchozí úlohy dokažte, že takzvané měkké maximum, definované pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jako funkce

$$f_n(\mathbf{x}) = \ln(\exp(x_1) + \exp(x_2) + \cdots + \exp(x_n))$$

je konvexní funkce. Pokud nechcete pracovat s obrovskými maticemi, použijte matematickou indukci podle n:

1. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x_1, \ldots, x_{n+1}$ platí

$$f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, f_2(x_n, x_{n+1})) = f_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$$

2. Dokažte, že funkce f_n je rostoucí ve všech souřadnicích.

3. Kombinací předchozích dvou bodů ukažte, že pokud f_n i f_2 jsou konvexní, tak je i f_{n+1} konvexní.

Problém 4. Dokažte, že každou pozitivně semidefinitní matici $A \in S_+^n$ lze napsat jako kuželovou kombinaci matic tvaru $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$, tj. že pro každé A existují vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ a nezáporná reálná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ taková, že

$$A = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T.$$

Rada: Co víte o vlastních vektorech a vlastních číslech pozitivně semidefinitních matic?

Problém 5. Napište program v jazyce Python, který s použitím knihovny CVXOPT nebo CVXPY vyřeší problém s nákupem plynu z prvního cvičení:

Objednáváme si teplo od plynárny na zimu. Funguje to tak, že si předobjednáme x kubíků plynu za cenu 8 Kč/m^3 a za každý kubík spotřebovaný nad toto množství zaplatíme 15 Kč/m^3. Oněch x kubíků zaplatíme rovnou a peníze za nespotřebovaný plyn nám plynárny nevrátí.

Podle našeho modelu bude letošní zima co do spotřeby tepla stejná jako jedna z deseti posledních zim (každá má pravděpodobnost 10%, že se zopakuje); historické spotřeby tepla jsou následující:

Zima	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008
m^3	50	200	70	60	20	300	150	180	100	20

Zformulujte problém lineárního programování, jehož optimum nám řekne, kolik kubíků předobjednat, aby očekávaná hodnota utracených peněz za příští zimu byla nejmenší možná.

Problém vyřešte a napište mi sem numerický výsledek. Co je důležitější, svůj kód v Pythonu mi *pošlete* na kazda@karlin.mff.cuni.cz do termínu odevzdání úkolu. Výjimečně nemusíte své řešení zdůvodňovat (úlohu už jsme na cvičeních rozebrali).

Při rešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty a studentkami Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.