Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 12 domácích úkolů

Termín odevzdání: **10.** ledna 2019 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
Σ	10	

Problém 1. Prozkoumáme chování gradientní metody pro funkci $f(x_1, x_2) = 1/2(x_1^2 + \gamma x_2^2)$ s počátečním bodem $\mathbf{x}^{(0)} = (\gamma, 1)$, kde $\gamma > 0$ je parametr. Pro jednoduchost předpokládejme, že pro nalezení t místo BLS použijeme přesné hledání, tj. volíme vždy t tak, aby hodnota $f(\mathbf{x} + t\mathbf{\Delta x})$ byla minimální.

Dokažte, pak v k-tém kroce gradientového sestupu je

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(\gamma \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^k, \left(-\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^k \right).$$

Co z toho plyne pro rychlost konvergence pro velké γ?

Problém 2. Najděte $n \in \mathbb{N}$ a dvě matice $P, Q \in S^n$ takové, že $P \succeq Q$, ale $\det P < \det Q$.

Pozn.: Na rozdíl od tvrzení z přednášky tady nepředpokládáme, že P, Q jsou pozitivně definitní.

Problém 3. Buď $A \in S^n$.

1. Proč má matice A vždy n vlastních čísel, když každé vlastní číslo počítáme tolikrát, kolik je jeho geometrická násobnost?

2. Dokažte, že
$$\det(I + A) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i),$$
kde λ_i je i-té vlastní číslo A (násobná vlastní čísla počítáme vícekrát).

Problém 4. Pro obecné $n \in \mathbb{N}$ najděte Löwnerův-Johnův elipsoid $\mathcal{E}$, který obsahuje n-dimenzionální simplex

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{e}_i \colon \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1, \, \mathbf{t} \succeq \mathbf{0} \right\}.$$